学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中外科学家发明家丛书

李善兰

BOOK

内部资料　非卖品

一、李善兰生活的时代

李善兰，原名李心兰，字竟芳，号秋纫，别号壬叔。生于 1811 年 1 月 2 日，浙江海宁人，是近代著名的数学、天文学、力学和植物学家。

李善兰出生的时候，中国还是一个独立的封建国家。占统治地位的是小农业和家庭手工业相结合的自给自足的自然经济。当时统治中国的清朝政府政治上日趋腐败，军事上战备越益废弛，农民阶级与地主阶级之间的阶级矛盾日益激化，清政府的统治面临着严重的危机。

清政府在对外关系中实行闭关锁国政策，这种政策保护了国内落后的生产关系，阻碍了资本主义萌芽的发展。

正当中国在黑夜中沉睡的时候，世界上欧美各主要国家资本主义却迅速发展起来。

以英国为首的各资本主义国家，为了寻求新的原料产地和商品市场，开拓新的殖民地，开始对中国和东方各国进行扩张和侵略。

1840 年，英国发动了鸦片战争。

在鸦片战争期间，广州三元里、江浙沿海和台湾军民对来犯的英军进行了不屈不挠的反侵略斗争。

1842 年 8 月 29 日，清政府被迫和英国签订了《南京条约》。不久，又被迫签订了中美《望厦条约》、中法《黄埔条约》。

不平等条约给中国造成了巨大的危害。

鸦片战争以后，出现了魏源、姚莹、包世臣等地主阶级知识分子的反侵略爱国思想和向西方学习的主张。

19 世纪后半期，西方科学知识开始大量传入。60 年代洋务运动的开展，七八十年代中国资本主义产生和发展，对于西方科学知识的引进和传播起了促进作用。

1862 年，清政府设立同文馆，开始只设外语课程，后来增加了数学、化学、天文学、生理学等课程。在上海、广州、福州、天津等地也设立了专门学堂，学习外语和西方科学知识。上海江南制造总局也翻译了一批科技书籍。

1857 年出版的《六合丛刊》是我国最早出现的综合性科学杂志，在中国科技发展史上起了重要作用。

随着西方自然科学知识的大量传入，以及近代工业的产生和发展，在 19 世纪后半期，中国涌现出一批科学家，他们为发展中国的近代科学作出了重要贡献。而李善兰的成就，在这些人当中，应当说佼佼者。

二、一岁功程今日始，
急须早著祖生鞭

李善兰出身于读书世家，他的先祖可以上溯至南宋末年京都汴梁（今河南开封）人李伯翼。

李伯翼一生读书论道，不乐仕进。

李伯翼之子李衎，元初举贤良方正，援朝请大夫嘉兴路总管府同知，全家定居海宁县硖石镇。

李衎第 17 世孙李祖烈，号虚谷先主，治经学。

李祖烈初娶望海县知县许季溪的孙女为妻，不幸许氏早夭；继娶妻妹填房，又病故。

李祖烈后续弦崔氏，是名儒崔景远之女。

崔氏生三子：长子李心兰（即李善兰），次子李心梅（也通晓数学），三子李心葵，还有一个女儿。

海宁是个风光秀丽的地方，著名的海宁钱江潮，吞天沃日，势极雄豪。李善兰在海宁这块宝地，自幼就读于私塾，受到了良好的家庭教育。他天资聪颖，又勤奋好学，只要是他读过的书，过目即能成诵。

9 岁时，李善兰发现父亲的书架上有一本中国古代数学名著《九章算术》，这本书约成书于东汉前期。全书分为九章：(1) 方田（分数四则算法和平面形求面积法），(2) 粟米（粮食交易的计算方法），(3) 衰分（分配比例的算法），(4) 少广（开平方和开立方法），(5) 商功（立体形求体积法），(6) 均输（管理粮食运输均匀负担的计算法），(7) 盈不足（盈亏类问题解法），(8) 方程（一次方程组解法和正负术），(9) 勾股（勾股定理的应用和简单的测量问题的解法）。其中负数、分数计算、联立一次方程解法等，都是具有世界意义的成就。全书由 246 个算术命题和解法汇编而成，标志着我国古代数学的完整体系的形成。李善兰读了这本书，感到十分新奇有趣，从此迷上了数学。

13 岁时，李善兰开始学习古代的诗歌创作。

14 岁时，李善兰又靠自学读懂了欧几里得《几何原本》前六卷，欧几里得（约前 330—约前 275）是古希腊数学家，他总结了前人的几何学知识研究成果，加以系统化。他把人们公认的一些事实列成定义和公理，使用逻辑推理的方法，给予演绎的证明。其中最著名的有平行公理，即平面上一直线和两直线相交，当同旁两内角之和小于两直角时，则两直线在该侧充分延长一定相交。用这些定义和公理来研究图形的性质，就形成了欧几里得几何学，简称欧氏几何学。欧几里得的《几何原本》是他最著名的著作，全书共 13 卷。第 1—6 卷为初等几何学部分。李善兰读的《几何原本》是明末大科学家徐光启（1562—1633）和意大利传教士利玛窦翻译的。欧氏几何严密的逻辑体系，清晰的数学推理，与偏重实用解法和计算技巧的中国古代传统数学思路迥异，自有它的特色和长处。

李善兰在《九章算术》的基础上，又吸取了《几何原本》的新思想，这使他的数学造诣日趋精深。

15 岁时，李善兰作诗的水平也大有提高，如：

膝下依依十五秋，光阴瞬息去难留，

嗟余马齿徒加长，爆竹惊心岁已周。

再如：

数声爆竹岁朝天，渐愧平与会讲年，

一岁功程今日始，急须早著祖生鞭。

都是写得很好的佳句。他年轻时写的《夏日田园杂兴》和《田家》等诗，如：

提筐去采陌头桑，闭户看桑月夜忙，

得到丝成空费力，一身仍是布衣裳。

颇为同情劳动人民的辛苦。

几年后，李善兰作为州县的生员，到省府杭州参加乡试，但李善兰自己

说：

“于辞章训诂之学，虽皆涉猎，然好之总不及算学，故于算学用心极深。”

结果八股文章做得不好，名落孙山。但他却毫不介意，而是利用在杭州的机会，留意搜寻各种数学书籍，买回了李冶的《测圆海镜》和戴震的《勾股割圆记》。

李冶（1192—1279），字仁卿，号敬斋。真定府栾城（今河北栾城）人。是金元之际的著名数学家。《测圆海镜》是他的代数名著，共 12 卷，是天元术的代表作。

戴震（1724—1777），字东原，一字慎修。安徽休宁（今属黄山市）人。是清代著名哲学家，考据学家，同时对数学也很有研究。戴震《勾股割圆记》三篇，上篇言三角八线和平面三角形解法，中篇言球面直三角形解法，下篇言球面斜三角形解法，凡 55 图、49 术，2000 余字。

李善兰仔细研读这两本书，使他的数学水平有了很大的提高。

李善兰曾经拜海盐人吴兆圻为师，学习过数学。这还是从许■祥《硖川诗续钞》注里才能了解到的。因为吴兆圻有《读畴人书有感示李壬叔》诗：

“众流汇一壑，雅志说算术。

中西有派别，圆径穷密率。”

“三统探汉法，余者难具悉，

余方好兹学，心志穷专一。”

许■祥《硖川诗续钞》注曰：

“秋塍（吴兆圻）承思亭先生家学，于夕桀、重差之术尤精。同里李壬叔善师师事之。”

李善兰在故里与蒋仁荣、崔德华等亲朋好友组织“鸳湖吟社”，常游“东山别墅”，分韵唱和，当时曾利用相似勾股形对应边成比例的原理测算过东山的高度。他的经学老师陈奂在《师友渊源记》中说他：

“孰习九数之术，常立表线，用长短式依节候以测日景，便易稽考”。

余楙在《白岳庵诗话》中说他“夜尝露坐山顶，以测象纬躔次”。

李善兰早年在家乡娶妻许氏，至今，李善兰的家乡还在流传着他在新婚之夜探头于阁楼窗外观宿星宿的故事。

三、尖锥术

1840 年，鸦片战争爆发。帝国主义列强入侵中国的现实激发了李善兰科学救国的思想。他说：

“呜呼！今欧罗巴各国日益强盛，为中国边患。推原其故，制器精也，推原制器之精，算学明也。”

“异日（中国）人人习算，制器日精，以威海外各国，令震慑，奉朝贡。”

从此他在家乡刻苦从事数学研究工作。

1842 年 5 月，英军攻陷江浙海防重镇乍浦，乍浦离李善兰的家乡硖石只有几十里的路程。他耳闻目睹侵略者烧杀淫掠的血腥罪行，满怀悲愤，奋笔疾作《乍浦行》一诗：

“壬寅四月夷船来，海塘不守城门开。

官兵畏死作鼠窜，百姓号哭声如雷。

夷人好杀攻用火，飞炮轰击千家灰。”

“饱掠十日扬帆去，满城尸骨如山堆，

朝廷养兵本卫民，临敌不战为何哉？”

表达了他对侵略者的刻骨仇恨，对老百姓的深切同情，也表达了他对清政府临敌不战的强烈不满和他对敌主战的鲜明态度。

1845 年前后，李善兰在嘉兴陆费设馆授徒，得以与江浙一带以数学家为主的学者顾观光（1799—1862）、张文虎（1808—1885）、汪曰桢（1813—1881）等人相识，他们经常在一起讨论数学问题。此间，李善兰有关于“尖锥术”的著作《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》等问世。

19 世纪 40 年代，在近代数学尚未自西方传入中国的条件下，李善兰异军突起，独辟蹊径，通过自己的刻苦钻研，从中国传统数学中垛积术和极限方法的基础上出发，大胆创新，发明尖锥术，具有解析几何的启蒙思想，得出了一些重要的积分公式，创立了二次平方根的幂级数展开式，各种三角函数，反三角函数和对数函数的幂级数展开式，这是李善兰也是 19 世纪中国数学界最重大的成就。

李善兰认为：

“元数起于丝发而递增之而造成则成平尖锥；

“平方数起于丝发而渐增之而迭之则成立尖锥；

“立方数起于丝发而渐增之变为面而迭之则成三乘尖锥；

“三乘方数起于丝发而渐增之变为面而迭之成三乘尖锥，……

“从此递推可至无穷。然则多一乘之尖锥皆少一乘方渐增渐迭而成也。”

因此，“诸乘方皆有尖锥”，

“三乘以上尖锥之底皆方，惟上四面不作平体，而成凹形。乘愈多，则凹愈甚”（图 1）。

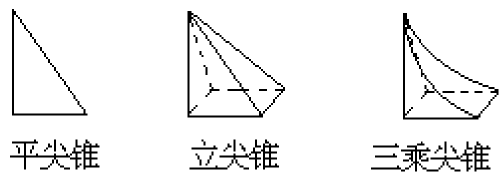

图1　尖锥体

“尖锥之算法”乃是

“以高乘底为实，本乘方数加 1 为法，除之得尖锥积”。

又，“二乘以上尖锥所迭之面皆可变为线”，

“诸尖锥既为平面，则可变为一尖锥”。

这样，对于一切自然数 n，乘方数 X^n 都可用线段长表示，它们可以积迭成 n 乘尖锥面。这种尖锥面由相互垂直的底线，高线和凹向的尖锥曲线组成。乘数愈多（即幂次愈高），尖锥曲线其凹愈甚（图 2）。

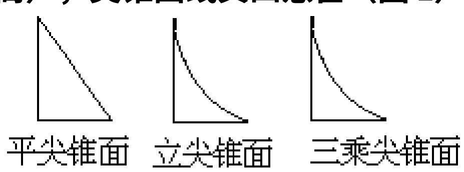

图2　尖锥面

在《方圆阐幽》中，李善兰取 $X^2=10^{-8}$ 及 $X^2=2\times10^{-8}$，用“分离元数法”归纳得二项平方根展开式

$$\sqrt{1-X^2}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}X^{2n}。$$

然后在四分之一个单位圆内应用尖锥术计算以X^{2n}**的系数**$\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$**为底的诸**$2n$**乘尖锥的合积（图 3），得**

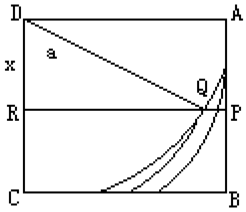

图3 方内圆外尖锥合积

$$\frac{\pi}{4}=1-\sum_{n-1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}$$

从而获得圆周率π的无穷级数值。

在《弧矢启秘》中，李善兰又用方内圆外的“截积”与尖锥合积的关系（图 4）得到：

“正弦求弧背”即反正弦的幂级数展开式

$$a=\sin a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}\sin^{2n+1}a$$

然后用直除、还原等方法得到其他诸多三角函数和反三角函数的幂级数展开式：

$$a=tga-\frac{1}{3}tg^3a+\frac{1}{5}tg5a-\frac{1}{7}tg^7a+\Lambda ,$$

$$a^2=\sec^2 a-\frac{6}{9}\sec^4 a+\frac{46}{90}\sec^6 a-\frac{44}{105}\sec^8 a+\Lambda ,$$

$$a^2=2versa+\frac{1}{12}(2versa)^2+\frac{1}{90}(2versa)^3+\Lambda ,$$

$$\sin a=a-\frac{1}{3!}a^3+\frac{1}{5!}a^5-\frac{1}{7!}a^7+\Lambda ,$$

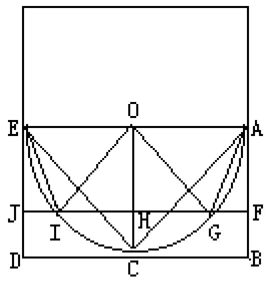

图4 正弦求弧背术（用圆内积）

$$tga=a+\frac{1}{3}a^3+\frac{2}{15}a^5+\frac{17}{315}a^7+\Lambda ,$$

$$\sec a-1+\frac{1}{2}a^2+\frac{5}{24}a^4+\frac{61}{721}a^6+\Lambda ,$$

$$versa=\frac{1}{2!}a^2+\frac{1}{4!}a^4+\frac{1}{6!}a^6+\frac{1}{8!}a^8+\Lambda ,$$

其中正切、正割、正反切、正反割的幂级数展开式是在中国首次独立得到的。

在《对数探源》中，李善兰列出了十道命题，从各个方面描述对数合尖锥曲线的性质。例如命题九“凡两残积，此残积之高与彼残积之高，彼截线与此截线可相为比例。”（图 5）

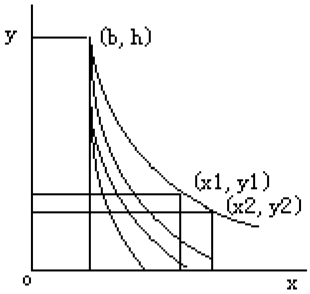

图5 对数合尖锥曲线

即是说 $x_1y_1=x_2y_2$，或 xy=c（这里 c=bh 为常量）。然后，根据这些性质得出了对数的幂级数展开式

$$\lg n = \lg(n-1) + u\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot n^k},$$

式中的u即李善兰所谓“诸尖锥定积之根”lge，亦即$\frac{1}{\ln 10}$。

从以上可以看出，李善兰所创立的尖锥面是一种处理代数问题的几何模型。它由互相垂直的底线、高线和凹向的尖锥曲线所围成，并且在考虑尖锥合积的问题时，也是使诸尖锥有共同方向的底线和高线。这样的底线和高线具有平面直角坐标系中的横纵两个坐标的作用。

而且，这种尖锥面是由乘方数渐增渐迭而得。因此，尖锥曲线是由随同乘方数一起渐增渐迭的底线和高线所确定的点变动而成的轨迹。于是李善兰把每一条尖锥曲线看作是无穷幂级数中相应的项，这实际上就给出了这些尖锥曲线的代数表示式（以高线为 x 轴，底线为 y 轴）。

平尖锥$y=\frac{b}{h}x$（直线），

立尖锥 $y=\frac{b}{h^2}x^2$（抛物线），

三乘尖锥 $y=\frac{b}{h^3}x^3$（立方抛物线），

……

同样，

对数合尖锥 y（h-x）=bh（等轴双曲线）。若以底线为 x 轴，高线为 y 轴，则对数合尖锥曲线的方程为 xy=bh（图 5）。

再则，李善兰的尖锥求积术，实质上就是幂函数的定积分公式

$$\int_0^h ax^h dx = \frac{ah^{n+1}}{n+1}$$

和逐项积分法则

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\int_0^h a_n x^n dx\right) = \int_0^h\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n\right)dx。$$

李善兰建立在尖锥术基础上的对数论独具特色，受到中外学者的一致赞

誉。英国传教士伟烈亚力（1815—1887）说：

“李善兰的对数论，使用了具有独创性的一连串方法，这到了如同圣文森特的格雷戈里（1638—1675）发明双曲线求积法时同样漂亮的结果。”

“倘若李善兰生于纳皮尔（1550—1917）、布里格斯（1556—1631）之时，则只此一端即可闻名于世。”

顾观光发觉李善兰求对数的方法比传教士带进来的方法高明、简捷，认为这是洋人“故为委曲繁重之算法以惑人视听”，因而大力表彰说：“中土李（善兰）、戴（煦）诸公又能入其室而发其藏”，并大声疾呼“以告中土之受欺而不悟者”。

四、著书与交往

1845 年，李善兰还撰著了《四元解》 2 卷。

《四元解》是解释元朱世杰《四元玉鉴》中的高次方程自消之解法。

朱世杰字汉卿，号松庭。北京附近人。他的《四元玉鉴》成书于 1303 年，全书分 3 卷，24 门，共 288 个问题，最主要的问题是四元术。

四元术是在天元术基础上逐渐发展而成的。

四元术是多元高次方程列方程亦解方程的方法，未知数最多时可至 4 个。

四元术开头处总要有

“立天元一为××，地元一为○○，人元一为△△，物元一为**”，即相当于现代的

“设 x，y，z，u 为××，○○，△△，**。”

天元术是用一个竖列的筹式依次表示未知数（x）的各次幂的系数的，而四元术则是天元术的推广。

朱世杰的四元术消去法，即将多元高次方程组依次消元，最后只余下一个未知数，从而解决了整个方程组的求解问题。譬如：二元二行式的消法，其步骤可简述如下：

例如“假合四草”中“三才运元”一问，最后得出如下图的两个二元二行式，这相当于求解

7	-6太
3	-7
-1	-3
	1

13	-14太
11	-13
5	-15
-2	-5
	2

$$\begin{cases}(7+3z-z^2)\ x+\ (-6-7z-3z^2+z^3)\ =0\\(13+11z+5z^2-2z^3)\ x+\ (-14-13z-15z^2-5z^3+2z^4)\ =0\end{cases}$$

或将其写成更一般的形式$\begin{cases}A_1x+A_0=0\\B_1x+B_0=0\end{cases}$

其中 A_0，B_1 和 A_1，B_0 分别等于算筹图式中的“内二行”和“外二行”，都是只含 z 而不含 x 的多项式。

朱世杰解决这些二元二行式的消去法即是“内二行相乘、外二行相乘、

相消。”也就是

$F(z)=A_0B_1-A_1B_0=0$。

此时 F（z）只含 z，不含其他未知数。解之，即可得出 z 之值，代入上式任何一式中，再解一次只含 x 的方程即可求出 x。

李善兰的《四元解》，则是以自己的见解解四元方程组，对了解朱世杰原意帮助不大。

1848 年，李善兰撰著《麟德术解》，解释唐李淳风（602—670）“麟德历”中的二次差内插法。

李淳风，岐州雍县（今陕西凤翔）人。撰麟德历，于公元 665 年行用。

麟德历引进了刘焯（544—610）的二次差内插法推算太阳和月亮的不均匀运动。

刘焯的二次差内插法全称是等间距二次差内插法，它的算式可以概括为

$$T=T_0+\frac{t}{l}\cdot\frac{(\triangle_1+\triangle_2)}{2}+\frac{t}{l}(\triangle_1-\triangle_2)-\frac{t^2}{2l^2}(\triangle_1-\triangle_2)$$

由上式可求任一时日太阳实行度与平行度之差 T，式中的 t 系指某节气初日与所求时日的间距。l 为一节气的日数，对于秋分后到春分前的各节气，$l=\frac{16}{11}\times10=14.54$日，对于春分后到秋分前的各节气，$l=\frac{17}{11}\times10=15.45$日。它们分别是秋分到春分，和春分到秋分的每一个定气日数平均值的约数，其准确值应分别为 14.76 日和 15.68 日。T_0指某节气太阳实行度与平行度之差。$\triangle_1$和$\triangle_2$分别为某节气后相邻两节气的 T_0之差。 T_0（“衰总”）、$\triangle_1$和$\triangle_2$（“躔衰”）均可由刘焯皇极历的日躔表查得。

1851 年，李善兰与著名数学家戴煦相识。

戴煦，字鄂士，号鹤墅，又号仲乙，浙江钱塘（今杭州）人。15 岁入杭州府学，以后便绝意进取开始数学研究与著述。青年时期与同里谢家禾共同研治数学。1826 年，完成《四元玉鉴细草》若干卷，项名达（1789—1850）读后即“命驾见过，引为忘年交”，遂成为终生的学术挚友。中年以后，进入数学创作的兴旺时期。1837 年，校刊谢家禾《谢谷堂算学三种》。自 1845 年至 1852 年，凡八易寒暑，共完成数学著作 4 种 9 卷总名《求表捷术》。其间与项名达学术交往频繁，两人“共定开方捷术”。1845 年至 1846 年，项氏分别为戴煦《对数简法》、《续对数简法》作序。

戴煦于 1852 年称：

去年和李善兰交了朋友，……起因在于我把我未写完的书稿请他雅正，但是，李善兰对我书稿中的余弧和切割二线互求的方法非常欣赏，再四催促我完成书稿，今年他又寄信给我问及此事，于是，我就谢绝杂事，关门抄录，用了一个多月完成了书稿。哎呀！朋友的帮助，难道是可以少的吗？”

戴煦和李善兰在一起互相讨论了李善兰的《对数探源》、《弧矢启秘》和戴煦未完槁的《外切密率》等书的内容。

李善兰和友人在学术上相互切磋，取长补短。他与数学家罗士琳（1774—1853），徐有壬（1800—1860）也“邮递问难，常朝覆夕又至。”

徐有壬，字君青，亦字钧卿。浙江乌程（今湖州人）。他一生的主要活动在于仕途，曾任云南布政使，并以镇压太平天国农起义而终其一生。

徐有壬对数学有浓厚的兴趣，因此，他与李善兰等同时代的数学家也有

广泛的交往。

五、翻译西方科学著作

1852 年夏，李善兰到上海墨海书馆，将自己的数学著作给来华的外国传教士展阅，受到伟烈亚力等人的赞赏，从此开始了他与外国人合作翻译西方科学著作的生涯。

伟烈亚力祖籍苏格兰，1791 年其父移居伦敦。他先后在苏格兰和伦敦上学，中学毕业后跟随一家具匠为学徒。他很早就对中国深感兴趣，借助于一本拉丁文的《汉语知识》和一部汉译《新约》，他无师自通，掌握了汉语的大概。1846 年，英国伦敦会在华传教士理雅各返英为本会在华出版机构物色人选，伟烈亚力毛遂自荐。理雅各对他的天才十分惊叹，立即接收他入会。经过半年印刷业务进修之后，随即被派往中国。1847 年 8 月 26 日来华后，在上海主持伦敦会墨海书馆的出版事务。

受明末清初来华耶稣会士的影响，伟烈亚力认为宣传科学有利于传播基督教。他以利玛窦（1552—1610）等人为榜样，准备翻译科学著作吸引中国知识分子。为此，在主持馆务之余，他广泛研读中国典籍，开始学习中国传统的天文数学。他说：

“ 余自西土远来中国，以传耶稣之道为本，余则兼习艺能。 ”

1849 年，墨海聘王韬译书。现在李善兰又应邀进馆。

李善兰与伟烈亚力翻译的第一部书，是欧几里得《几何原本》后 9 卷。

徐光启和利玛窦于 1607 年翻译出版了《几何原本》的前 6 卷，为初等几何学部分。后 9 卷是关于数的理论、不尽根的几何解法、立体几何学等，一直未能翻译，所以，李善兰说：“ 续徐、利二公未完之业 ”。于 1857 年翻译出版了《几何原本》后 9 卷。

在翻译《几何原本》的同时，李善兰又与艾约瑟（1823—1905）合译了《重学》 20 卷。

《重学》即《初等力学》，英国胡威力原著。李善兰同艾约瑟合译的《重学》是中国近代科学史上第一部包括运动学和动力学、刚体力学和流体力学在内的力学译著，也是当时最重要、影响最大的物理学译著。其中关于牛顿（1642—1727）运动三定律，用动量的概念讨论物体的碰撞、功能原理等，都是首次在中国得以介绍。

其后，还与伟烈亚力合译了：

第一：英国赫歇尔（1738—1822）原著《谈天》，即《天文学纲要》18 卷，内容包括哥白尼（1473—1543）日心地动学说，开普勒（1571—1630）行星椭圆运动定律和牛顿万有引力定律等，它使中国天文学界耳目为之一新，近代天文知识开始在中国广为传播，中国近代天文事业从此得到发展。

第二：英国德摩根原著《代数学》13 卷。

第三：美国卢米斯原著《代微积拾级》，即《解析几何与微积分初步》 18 卷。

李善兰还与韦廉臣合译了英国林德利原著《植物学》，即《植物学基础》8 卷，是我国最早介绍西方近代植物学的译著，内容包括只有在显微镜下才能看到的植物内部组织构造，在实验和观察的基础上所建立的有关植物体各器官组织的生理功能的理论，以植物体本身形态构造特点为依据的科学的植

物分类方法等。

以上几种书均于 1857—1859 年由上海墨海书馆刊行。

此外，他还与伟烈亚力、傅兰雅（1839—1928）合译过《奈端数理》，即牛顿《自然哲学的数学原理》，可惜没有译完，未能刊行。

傅兰雅是英国人，出生于贫穷的牧师之家，从小向往中国。1861 年自伦敦海格伯里师范学院毕业后，接受英国圣公会的派遣，到该会所属的香港圣保罗书院任校长。两年后，北上京师任同文馆英文教习。又两年，转任上海英华学塾校长。在港、京、沪等地，他很快掌握了当地的方言，不久，即以其出色的汉语能力小有声名。傅兰雅虽受教会派遣，但对传教兴趣不大，因而与圣公会发生了矛盾。1868 年 5 月，他辞去英华学塾之职，脱离教会，就上海制造局聘任，从事西方科技著作的翻译工作，转而为清政府效力。6 月，制造局专设一翻译馆，进行了大量的翻译工作。

李善兰在翻译过程中，大量的近代科学名词，其中文译名都没有先例可供参考。本着对后人负责的精神，李善兰仔细琢磨，反复斟酌，十分贴切地创译了一大批科学名词，如代数学中的代数、函数、常数、变数、系数、已知数、未知数、方程式、单项式、多项式等，解析几何学中的原点、轴、圆锥曲线、抛物线、双曲线、渐近线、切线、法线、摆线、蚌线，螺线等，微积分中的无穷、极限、曲率、歧点、微分、积分等；天文学中的历元、方位、视差、自行、摄动、光行差、月行差、月角差、二均差、蒙气差、星等、变星、双星、三合星、本轮、均轮等；力学中的分力、合力、质点、刚体等；植物学中的植物、细胞、菊科、豆科、蔷薇科、杨柳科、芭蕉科等。一百多年过去了，这些科学名词不仅在我国流传下来，还飘洋过海，东渡日本等国，沿用至今未改。

李善兰在 19 世纪 50 年代中对西方近代科学中数学、物理、天文、生物等学科的翻译工作，加上 70 年代初徐寿（1818—1884）对化学，华蘅芳（1833—1902）对地学的翻译工作，20 年间，近代科学各大门类的先进知识都介绍进了中国，这为中国近代科学的发展奠定了坚实的理论基础，具有不可磨灭的历史意义。

在译书的同时，李善兰还帮助伟烈亚力研究中国天文算学，并把中国天文数学的成就介绍到西方。

六、垛积术

1858 年 12 月，徐有壬任江苏巡抚。

1860 年，徐有壬邀请李善兰作其幕宾。

4 月 13 日，太平天国忠王李秀成部攻克苏州，徐有壬被杀。太平军占领苏州后，李善兰留在苏州的行箧，包括各种著作手稿，散失以尽。从此他“绝意时事”，避乱上海，埋头从事数学研究，重新著书立说。

徐有壬的代表作是《割圆八线缀术》4 卷。自杜德美（1668—1720）将 π、sina、versa 的展开式传入中国之后，许多数学家以不同方式进行了深入的研究并获得了大量结果。其中有些结果彼此相同，从八线互求的角度来看杜德美弧求弦矢之后，明安图（1692？—1763？）首先给出弦矢求弧式，项名达首先给出弦求割矢式，李善兰首先给出弧求割线及其反求式。即：

第一：已知 a，求 seca

第二：已知 seca 求 a

在此基础上，徐有壬给出其余 9 式。

李善兰在上海期间，与数学家吴嘉善、刘彝程等人都有过学术上的交往。

1861 年秋，洋务派首领、两江总督曾国藩（1811—1872）在安徽筹建安庆军械所，并邀著名化学家徐寿、数学家华衡芳入幕。李善兰也于 1862 年被聘为幕僚，并兼管书局的工作。他一到安庆，就拿出印行了没有多少册而在战火中毁版的《几何原本》等数学书籍请求曾国藩重印刊行，并推荐张文虎等人入幕。他们同住一处，经常进行学术讨论，积极参与洋务新政中有关科学技术方面的活动。

1864 年 7 月 19 日，曾国藩攻陷太平天国首都天京（今南京），李善兰等也跟着到了南京。他再次向曾国藩提出刻印他所译所著的数学书籍，得到曾国藩的支持和资助，于是有金陵刊本《几何原本》 15 卷和 1867 年金陵刊本《则古昔斋算学》24 卷问世。

1867 年刊行的《则古昔斋算学》收录李善兰 20 多年来的各种天算著作，计有：

《方圆阐幽》1 卷（1845）

《弧矢启秘》2 卷（1845）

《对数探源》2 卷（1845）

《垛积比类》4 卷

《四元解》4 卷（1845）

《麟德术解》 3 卷（1848）

《椭圆正术解》2 卷

《椭圆新术》1 卷

《椭圆拾遗》3 卷

《火器真诀》1 卷（1858 年）

《对数尖锥变法释》1 卷

《级数回求》1 卷

《天算式问》1 卷。

其中，《垛积比类》一书，是李善兰的另一杰出数学成就——垛积术。

在中国数学史上，北宋沈括（1031—1095）首创隙积术开垛积研究之先河。

隙积术是一种求解垛积问题的方法，属于高阶等差级数求和的问题。沈括具体涉及到的有累棋、层坛和积罂等问题，他得出了正确的求解公式：

垛积体数目式体积

$$V_{隙}=\frac{h}{b}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{h}{b}(c-a)$$

其中 a 和 c 分别为垛积体上、下宽度，b 和 d 分别为垛积体上、下长度，h 为垛积体的高度。

元朱世杰《算学启蒙》（1299）、《四元玉鉴》（1303）中的垛积问题，分“落一”、“岚峰”两大类，其垛积公式分别为

$$\sum_{r=1}^{n}\binom{r+p-1}{p}=\binom{n+p}{p+1}$$

和 $$\sum_{r=1}^{n}\binom{r+p-1}{p}=\frac{(p+1)n}{p+2}\binom{n+p}{p+1},$$

其中 $$\binom{m}{n}=\frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$。

清陈世仁（1676—1722）、汪莱（1768—1813）、董祐诚（1791—1823）等人继续研究，有所成就。

汪莱在 1799 年所写的《衡斋算学》第四册推求的一个重要组合公式

$$C_m^n=\frac{m!}{n!(m-n)!}$$

论证时，借用了传统的垛积知识，试以C_m^2为例，他说：

“以一物为主而兼它物得若干数，至以又一物为主而兼它物即不复兼先为主之物，故所得必少一数，由此递少遂成三角堆形。”就是说：从 m 个元素中每次取 2 个的组合数，可以看作先确定 1 个元素后将其与其余元素相配，得组合数为（m- 1）；再取第二个元素与不包括第一个元素的其余元素相配，得组合数（$m-2$）；依次类推，组合数每次递少一数，故得组合总数为$\sum_{i-1}^{m-1}i$，

这就是一个（平）三角堆，即公差为1的一阶等差级数，其和为$\frac{1}{2}m$（$m-1$）。同理，C_m^3，C_m^4，…，C_m^n则分别对应一个二乘、三乘、…、（$n-1$）乘三角堆。

董祐诚有《垛积求积术》 1 卷（1821），他以连比例四率法并结合垛积求积术求得“有通弦，求通弧加倍几分之通弦”，即

$$l_{2n-1}=(2n-1)-\frac{(2n-1)[(2n-1)^2-1^2]}{3!4r^2}l^3+$$

$$\frac{(2n-1)[(2n-1)^2-1^2][(2n-1)^2-3^2]}{5!4^2r^4}l^5-\Lambda,$$

和“有矢，求通弧加倍几分之矢，”

$$b_{2n}=\frac{n^2}{2!}(2b)-\frac{n^2(n^2-1^2)}{4!r}(2b)^2+\frac{n^2(n^2-l^2)(n^2-2^2)}{6!r^2}(2b)3-\Lambda,$$

等两个展开式。

其中 l 为通弦，l_{2n-1}为倍分弦，b 为矢，n 为倍分矢，r 为圆半径。

李善兰集前人之大成、发扬创新，撰《垛积比类》，“所述有表、有图、有法，分条别派，详细言之”，自成体系，别立一帜。除三角垛和三角变垛包含了朱世杰落一形和岚峰形两类垛积外，又创造了三角自乘垛和乘方垛两类新的垛积，其求和公式分别为

$$\sum_{r=1}^{n}\binom{r+p-1}{p}^2=\sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}^2\binom{n+2p-a}{2p=1}$$

和

$$\sum_{r=1}^{n} r^{m} = \sum_{k=0}^{m-1} L_{k}^{m-1}\binom{n+k}{m+1},$$

其中“李氏数”可作如下归纳定义：

$$L_{k}^{m} = (k+1)L_{k}^{m-1} + (m-k+1)L_{k-1}^{m-1},$$

并有性质

$$\sum_{k=0}^{m} L_{k}^{m} = (m+1)!。$$

三角自乘垛的中心，是被称做“李善兰恒等式”的组合公式

$$\binom{n+p}{p}^{2} = \sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}^{2}\binom{n+2p-a}{2p}。$$

该式驰名中外，自 20 世纪 30 年代以来不断引起数学界的广泛兴趣。我国数学家章用（1911—1939）、华罗庚（1910—1985）和匈牙利数学家图兰·帕尔等人都研究和证明过它。

乘方垛积计算问题相当于求自然数的幂和公式，这在数学史上是一个古老的题目，同时又是通向微积分学最基本和最普遍的公式——幂函数的定积分公式的阶梯。

李善兰把 m-1 乘方垛积分解成 m 类共 m！个三角 m 变垛或者说是 m 类 m！个组合数之和，从而得出了自然数的 m 次幂和公式。更进一步，李善兰以 m-1 乘方垛积迭成底为 b，高为 h 的 m 乘尖锥，先有

$$V_{垛} = \sum_{r=1}^{h} b\left(\frac{r}{h}\right)m = \frac{bh}{h^{m+1}}\sum_{k=0}^{m-1} L_{k}^{m-1}\binom{n+k}{m+1} = \frac{bh}{(m+1)!}\sum_{k=0}^{m-1} L_{k}^{m-1}\prod_{i=1}^{m}\left(1+\frac{i-k}{n}\right)。$$

然后取极限，即得 m 乘尖锥积为

$$V_{锥} = \lim_{n\to\infty} V_{垛} = \frac{bh}{(m+1)!}\sum_{k=0}^{m-1} L_{k}^{m-1} = \frac{bh}{m+1}。$$

这就是著名的尖锥求积术公式，它的确渊源于中国传统数学中垛积术和极限方法。

七、素数论

1865 年，李鸿章在南京建立金陵机器局。这年，李鸿章由江苏巡抚升任两江总督，将其在苏州办的制炮局迁到南京。金陵机器局的机器主要购自英国，主要技师为英国军医出身的马格里。该局所造枪炮是供淮军“剿捻”使用。

1866 年，李鸿章资助李善兰重刻《重学》 20 卷，并附《圆锥曲线说》3 卷出版。这一年，在北京的京师同文馆内添设了天文算学馆，广东巡抚郭嵩焘（1817—1891）上疏举荐李善兰为天文算学总教习，但李善兰忙于在南京出书，到 1868 年才北上就任。

1869 年，李善兰被“钦赐中书科中书（从七品卿衔）”，1817 年加内阁侍读衔。

1872 年，李善兰发表了题为“《则古昔斋算学》十四”的《考数根法》，

这是他的第三项重要数学成就，是中国素数论上最早的一篇论文。所谓数根，就是素数。考数根法，就是判断一个自然数是否为素数的方法。

李善兰说：

“任取一数，欲辨是数根否，古无法焉，”他“精思既久，待考之法四”，即：

第一：屡乘求一法，

第二：天元求一法，

第三：小数回环法，

第四：准根分级法，

用以对已给的数 N，找出最小的指数 d，使 a^d-1 能被 N 整除，这里 a 是与 N 互素的任何自然数。

李善兰证明了著名的费马素数定理（1640），并且指出它的逆定理不真。亦即，若 a^d-1 能被 N 整除，而 N 是素数，则 N-1 能被 d 整除；但 d 能除尽 N-1，未必 N 一定是素数。

李善兰还进一步指出，若 N 非素数而 d 也能整除 N-1，则 N 的因整必具 K_p+1 的形式，内 p 为能除尽 d 的数，k 为自然数。只有任何具有 k_p+1 形式的数都又能除尽 N 时，N 才肯定是素数。

八、其它数学著作

李善兰在他所著的《椭圆正术解》中解释了徐有壬《椭圆正术》中行星椭圆轨道运行问题的比例算法和对数算法。

李善兰还在《椭圆新术》中首次在我国用无穷级数法求解开普勒方程。

李善兰的《火器真诀》则提出别具一格的图解法，以量代算，是我国第一部精密科学意义上的弹道学著作。

《级数回求》是通过几个特殊的幂级数$y=\sum_{i=1}^{\infty}fi(x)$，以有限步骤经归纳方法反求幂级数$x=\sum_{i=1}^{\infty}Fi(y)$。

《天算或问》以自问自答的形式解决了若干有关中国古代数理天文学中的问题，其中对外国传入的颜家乐利用恒星出地平到上中天的时间和上中天的地平高度求当地的地理纬度，李善兰改进了这一方面的适应性，使能选用任意恒星决定任一地方的纬度，这在中国测绘史上也占有一席之位。

九、李善兰的诗文

李善兰的诗文，也颇具特色，有些还集中表现了他的爱国思想和科学精神。

李善兰遗诗 200 余首，多数汇集于《听雪轩诗存》（汲修斋校本）中。而他的文章，见于汲修斋丛书所辑《则古昔斋文抄》和散见于《中西闻见录》等中的，计有序跋、书信、传记、杂文等数十篇。

清代乾嘉（乾隆、嘉庆）学派的泰斗阮元（1764—1849）大力罗致学者，编书刊印。有不少当时学者的天文、数学著作赖他之力得以出版，如钱大昕

（1727—1804）研究中国古代历法的《三统术衍》和介绍哥白尼学说的《地球图说》等。

阮元主编，李锐、周治平参与编纂的《畴人传》，是一部著名的述评天文、数学家活动的传记集。全书 46 卷，269 篇，列叙中国上起三皇五帝时代，下迄嘉庆初年去世的天文历法家、数学家 275 人，西洋天文学家、数学家和来华传教士 41 人。传记一般是在姓名、字号，籍贯、科举出身和主要官职之后以主要篇幅介绍传主有关天文学、数学的“议论行事”。有天文、数学著作的，不论存佚，都列出名目，并录其序言，凡例，记其摘要。书中搜集整理了丰富的天文数学史料。各篇传记之后，多有阮元撰写的“论”，对人物的思想和工作进行评论，或对学术的源流沿革进行分析。

阮元在《畴人传》中有其进步意义的一面，但是又在书中宣扬“西学东源说”，表现出狭隘性和历史的局限。他在书中介绍哥白尼学说后，还做有贬低性的评论。

李善兰在《谈天》序中，大力表彰哥白尼、开普勒、牛顿等人不断探索真理，“苟求其故”的科学态度，勇于批判阮元对哥白尼学说的攻击和钱大昕对开普勒定律的实用主义观点，说阮元、钱大昕“未尝精心考察，而拘牵经义，妄生议论，甚无谓也。”

李善兰在《星命论》中，揭露“术士专以五行之生克判人一生之休咎”的荒诞无稽，他的议论非常透彻，发人深省。

十、小学略通术数，大隐不在山林

1874 年，李善兰升为户部主事，加六品卿员外衔。

1876 年升员外郎（五品卿衔），但他依然孜孜不倦地从事同文馆教学工作，并埋头进行学术著述。

1877 年演算《代数难题》。

1879 年，李善兰又加四品卿衔。

1882 年授三品卿衔户部正郎、广东司行走，总理各国事务衙门章京。一时间，京师各“名公巨卿，皆折节与之交，声誉益噪”，但他“犹手著《级数勾股》二卷，老而勤学如此。”

李善兰生性落拓，跌宕不羁，潜心科学，淡于利禄。曾国藩等赏识他，“屡欲列之荐牍，皆力辞。”

晚年他虽官居内阁高位，但从来没有离开过同文馆教学岗位，也没有中断过科学研究工作。他自署对联“小学略通术数，大隐不在山林”张贴门上，表明他仍然以在野的隐士自居，而不与贪官污吏者同流合污。

十一、李善兰与华蘅芳

1882 年 12 月 9 日，李善兰卒于北京，享年 72 岁。

李善兰早年在家乡娶妻许氏，无子；晚年在北京纳妾米氏，仍未得子；乃过继外甥崔敬昌为嗣。敬昌字吟梅，曾任江海关文牍。

李善兰的一生以 1852 年为界，1852 年以前，李善兰创立了尖锥术，在他的尖锥术的基础上，解析几何思想和微积分方法的萌芽，是可以生根、长叶、开花、结果的。从这个意义上说，中国数学也可能以自己特殊的方式走

上近代数学的道路。但是，1852 年，李善兰便接触到了大量从西方传进来的近代数学，并参与了把解析几何和微积分学介绍进中国的翻译工作。从此，中国传统数学逐渐汇入世界数学发展的洪流中。

在清末数学界，李善兰与华蘅芳（1833—1902）的关系是脍炙人口的。

华蘅芳，字若汀，生在无锡南延乡荡口的一个小官僚家庭。

无锡是江南的富庶之区，地灵人杰，富有文化传统。华蘅芳 14 岁那年，受同乡徐寿的影响，立志探求新的知识。一次，他从徐寿那里借到一本明代算学家程大位（1533—1606）的著作《算法综宗》，爱不释手，朝夕研读，书中所列难题，硬是被他一个个地攻破了。这次学习，使他尝到了学习算学的一些甜头，竟由此对算学产生了浓厚的兴趣，简直到了入迷的程度。他一钻进书房，便整天不出门，还经常到书坊去搜求数学书籍。华蘅芳青少年时代对数学有了相当多的了解，无师自通，通过自学，对上自秦汉下至明清时期的中国古代大量算学著作进行了比较全面、系统的学习和钻研，从中汲取了丰富的营养，为攀登数学科学的高峰打下了坚实的基础。

一次，华蘅芳得知上海有个名叫李善兰的数学家，正同外国天文数学家伟烈亚力合作，一起翻译一部叫《代微积拾级》的数学著作，便千里迢迢，来到上海登门求教。

华蘅芳的诚恳、坦率和好学，使李善兰很受感动。李善兰不仅认真回答了他所提出的一连串问题，而且还主动向他介绍了当今世界数学研究的情况，使华蘅芳眼界大开。最后，李善兰慷慨地将自己已经译出的《代微积拾级》手稿借给了他，让他抄写，供他研习。

华蘅芳如获至宝，回家乡后便足不出户地攻读。由于当时国外的数学水平远高于我国，所以华蘅芳遇到了许多困难。一年过去了，还是弄不明白。这可真把他难住了。他鼓起勇气，二赴上海向李善兰再次请教，李善兰不厌其烦，耐心地向华蘅芳进行讲解，鼓励他要“反复钻研，持之以恒”。

上海之行，鼓起了华蘅芳继续钻研的风帆。经过认真努力的钻研，终于找到了学习的秘诀：不求之过急，一步一个脚印地向前探索。这样一来，局面逐步打开了，不到一年，他便领会了《代微积拾级》的精神实质。

华蘅芳的数学成就主要有开方术、积较术和数根术三个方面。

在《开方别术》等著作中，华蘅芳提出求整系数高次方程的整数根的新方法——“数根开方法”，李善兰评价说：

“并诸商为一商，故无‘翻积’、‘益私’不特生面独开，且较旧法简易十倍。”

“数根开方法”的缺点是不能求方程的无理数根。

在《积较术》等著作中，华蘅芳讨论招差法在代数整多项式研究和垛积术中所起的作用。其中“诸乘方正元积较表”和“积较还原表”，分别定义了两种计数函数，与所谓第一、二种斯特林数都有关系，从而给出一组乘方乘垛互反公式和若干组合恒等式，是为计数理论的中心问题，在组合数学和差分理论中都有一定的意义。

在《数根术解》等著作中，华蘅芳指出：

“有单位之数根（即素数），即可求两位之数根；有两位之数根，即可求四位之数根。”他的具体方法是：“以单位之数根 3、5 与 7 连乘，得 105，以两位之数求等（即公约数），其有等者可以等数约之，故非数根；其无等者除 1 之外俱不能度，故为数根。”这就是今天数学中的“筛法”，如是便

得到两位数的素数 21 个。

华蘅芳还指出，随着自然数的位数增加，素数的间隔愈稀，但素数的个数是无穷的。他用诸乘尖堆法证明了费马素数定理（1640），与欧拉（1707—1783）证法相似。但是他还是不能像李善兰《考数根法》中那样指出费马定理的逆定理不真。

华蘅芳的数学成就受到当时数学界的高度评价。李善兰赞他：“ 独务精深 ”，“ 空前绝后 ”；不过，华蘅芳的开方术、积较术、数根术，比起李善兰的尖锥术、垛积术、素数论来讲，还是略有逊色。

华蘅芳对近代科学包括近代数学的翻译工作比他的数学著述更有成就和影响。

华蘅芳在同外国人合作译书的过程中，发觉傅兰雅精于数学，又“ 深通中国语言文字 ”，于是决定继李善兰、伟烈亚力翻译《代数学》、《代微积拾级》之后，同傅兰雅合译西方近代数学书籍，以“ 补其所谓 ”。20 余年间，出版了以下 7 种：

《代数术》（英国人华来士撰，原载《大英百科全书》第八版，1853）25 卷，1872 年初刊；

《三角数理》（英国人海麻士撰， 1858） 12 卷， 1878 年初刊；

《代数难题解法》（英国人伦德撰， 1878） 16 卷， 1829 年初刊；

《决疑数学》（英国人加洛韦撰，原载《大英百科全书》第八版，1853；英国人安德森撰，《钱伯斯百科全书》新版，1860）10 卷，1880 年初刊；

《合数术》（即《代数总法》，美国人白尔尼撰， 1863） 11 卷，1888 年初刊；

《算式别解》（一作《算式解法》，美国人休斯敦、肯内利合撰，1898）14 卷，1899 初刊。

译成未刊者还有《相等算式理解》、《配数算法》等。

在上述各书中，华蘅芳介绍西方数学家的代数学、三角学、微积分学和概率论，所含数学知识比李善兰的书丰富，内容也比较新颖。如《决疑数学》是中国第一部编译的概率论著作，介绍了人口估测、人寿保险、预求定案准确率和统计邮政、医疗事业中某些平均数的方法，令人耳目一新；还详细叙述了西方概率论史、涉及著名数学家约 30 人，这就增进了中国数学界对西方数学界的认识和了解。《代数难题解法》和《算式别解》都是原书刚刚出版，第二年就译出刊行，及时反映了当时西方数学的水平。

在关于李善兰的学术研究方面，中国著名的数学史专家李俨（1892—1963）在 1955 年由科学出版社出版的《中算史论丛》的第 4 集（全书共 5 集）书末附有李善兰、华蘅芳二人的年谱，是了解李善兰活动的重要资料。

在文化大革命期间，由于众所周知的原因，中断了对李善兰的研究工作。

粉碎四人帮以后，数学界和数学史界又重新开始研究和评价李善兰的数学成就，介绍和研究李善兰数学成就的文章有：

李迪：十九世纪中国数学家李善兰，载中国科技史料，3（1982），3，第 15—21 页。

罗见今：《垛积比类》内容分析，内蒙古师范学院学报（自然科学版），1982，1，第 89—105 页。

王渝生：李善兰的尖锥术，自然科学史研究，2（1983），3，第 266—288 页。

王渝生 :李善兰——中国近代科学的先驱者,自然辩证法通讯,5(1983),5,第 59—72 页。

在大学教育中,80 年代初,历史系所开的中国近代史课程中,还没有近代科学技术的内容,到 80 年代中期,大学历史系中国近代史教材普遍增加了有关近代中国文化的内容,并把科学技术和教育列为一节来讲述,甚至电大教材也增加了这一内容。例如:中央广播电视大学龚书铎等主编的《中国近代史纲》一书,第十三章,近代中国的文化,第四节就是科学技术和教育,内中用 1/10 的篇幅对李善兰的数学成就和西方科技书籍的翻译成就进行了介绍。