学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中外科学家发明家丛书

高斯

高　斯

卡尔·弗列德里奇·高斯（Carl Friedrich Gauss，公元 1777—1855）是德国 18 世纪末到 19 世纪中叶的伟大数学家、天文学家和物理学家，被誉为历史上最有才华的数学家之一。在数学上，高斯的贡献遍及纯粹数学和应用数学的各个领域。特别是在数论和几何学上的创新，对后世数学的发展有着深刻的影响。由于他非凡的数学才华和伟大成就，人们把他和阿基米德、牛顿并列，同享盛名，并尊称他为“数学王子”。德国数学家克莱因这样评价高斯：“如果我们把 18 世纪的数学家想象为一系列的高山峻岭，那么最后一个使人肃然起敬的顶峰便是高斯——那样一个在广大丰富的区域充满了生命的新元素。”

一、数学神童

在距德国柏林约 200 公里处有一座美丽的城市——布伦瑞克（Brunswick）。1777 年 4 月 30 日，高斯诞生在这个城中的一个农民家。父亲格布哈特·迪特里希·高斯是一个地道的农夫。早年，他曾从其父那里学得一手好农活，不到 20 岁便在附近庄园从事园艺。他先后做过护堤人、泥水匠和喷泉技师等。据布伦瑞克教堂记事簿中高斯诞生记录的记载，他父亲的职业是屠夫。高斯父亲和第一个妻子共同生活了 10 多年，未生孩子就因病去世了。1776 年，高斯的父亲同石匠赫里斯托夫·宾泽的女儿结婚，也就是高斯的母亲罗捷娜。高斯的母亲读过几年书，认得一些字，但不能写信。她结婚时已经 34 岁，婚后只生了高斯一个孩子。

高斯的父亲性格坚毅而严厉，但母亲却温柔而又聪慧。母亲对他备加疼爱，因而高斯喜欢母亲胜于父亲。

高斯聪敏早慧，他的数学天赋在童年时代就已显露。高斯的父亲虽是个农夫，但有一定的书写和计算能力。在高斯 3 岁时，一天，父亲聚精会神地算帐。当计算完毕，父亲念出数字准备记下时，站在一旁玩耍的高斯用微小的声音说：“爸爸，算错了！结果应该是这样……”父亲惊愕地抬起头，看了看儿子，又复核了一次，果然高斯说的是正确的。

后来高斯回忆这段往事时曾半开玩笑地说：“我在学会说话以前，已经学会计算了。”

在高斯启蒙教育中，舅舅弗雷德里希·本茨对他影响较大。本茨是位技术高超的锦缎织工，勤学好思，头脑机敏。他是高斯家的常客。他十分喜爱高斯，并经常给高斯讲故事，同他做游戏。

一次，高斯与舅舅出去游玩。走到河边时，只见河的上游漂来一根木头。

舅舅问：“高斯，你说木头为什么不沉下去？”

“木头轻呗。”高斯回答道。

舅舅弯下腰，捡起一颗石子，又问：“这颗石子重还是那段木头重？”

“木头重。”高斯说。

本茨并不吱声，他用力一扔，扑通一声，石子沉到了河底。

本茨用这种方法启发诱导高斯。

为了使高斯更好地成长，舅舅还为他买来不少儿童读物。高斯十分喜欢书里的故事，如饥似渴地读着。父亲对儿子的读书嗜好不以为然。每天，天还没有完全黑下来，就催促儿子上顶楼睡觉，以便节约燃料。顶楼又矮又小，而且还没有灯。高斯急中生智，想出了个好办法。他找来一根芜菁，把里面

挖空，塞进油脂，再用粗棉搓一根棉条做灯芯。借着微弱的光亮，贪婪地咀嚼着书里的每一个字。知识的泉水汩汩地滋润着高斯幼小的心田。

1784 年，高斯 7 岁，父亲把他送入耶卡捷林宁国民小学读书。教师是布伦瑞克小有名气的“ 数学家 ”比纳特。当时，这所小学条件相当简陋，低矮潮湿的平房，地面凹凸不平。就在这所学校里，高斯开始了正规学习，并在数学领域里一显他的天才。

1787 年，高斯三年级。一次，比纳特给学生出了道计算题：

1＋2＋3＋…＋98＋99＋100＝？

不料，老师刚叙述完题目，高斯很快就将答案写在了小石板上：5050。当高斯将小石板送到老师面前时，比纳特不禁大吃一惊。结果，全班只有高斯一人的答案是对的。

高斯在计算这道题时用了教师未曾教过的等差级数的办法。即在 1 至 100 中，取前后每一对数相加，1＋100，2＋99，……，其和都是 101，这样一共有 50 个 101，因此，101×50＝5050，结果就这样很快算出来了。

通过这次计算，比纳特老师发现了高斯非凡的数学才能，并开始喜爱这个农家子弟。比纳特给高斯找来了许多数学书籍供他阅读，还特意从汉堡买来数学书送给高斯。高斯在教师的帮助下，读了很多书籍，开拓了视野。

“ 他已经超过我了，”比纳特不得不承认，“ 我没有更多东西可以教他了。”

在这所学校里，有一位名叫约翰 · 马丁 · 巴蒂尔（1769—1836）的青年。巴蒂尔是比纳特的助手，他的工作是教小学生写字和削鹅翎笔。巴蒂尔后来成了德国数学家。由于对数学有着共同的爱好，两人很快成了好朋友。巴蒂尔买来代数分析书籍成了他们共同的课本。高斯不但看书，而且开始对数学大师们的某些“ 证明 ”不客气地提出挑战。

1788 年，高斯小学毕业了，经过比纳特和巴蒂尔的再三劝说，高斯的父亲才同意儿子继续升学，学费由比纳特和巴蒂尔负担。这一年，高斯以优异的成绩考入布伦瑞克高级文科中学。在这所学校里，他很快地掌握了古德语、拉丁语和希腊语的主要课程。由于他在古典文学上的良好基础和独到之处，他一开始就上了二年级。过了两年，他又升到了高中哲学第一班学习。这时，高斯仍未放弃对数学的爱好。

1788 年，高斯 11 岁时，巴蒂尔买到了他们盼望已久的大数学家欧拉著的《代数的完整介绍》一书。这是公认的代数学的权威著作。高斯对二项式（1＋x）^{n}定理产生了浓厚的兴趣。欧拉二项式（1＋x）^{n}的展开式是这样叙述的：当 n 为自然数时，展开式有有限项；当 n 为非自然数时，展开式有无限项。高斯对这一结论颇感兴趣，便尝试对它作出证明。关于这个证明的详细内容现在还没有留下可靠的资料，但即使这个证明是不完善的，至少也反映了高斯治学的严谨。高斯是公认的现代数学中第一个严格证明论者，他对分析的严密性要求影响了整个数学界。

12 岁时，高斯对统治了 2000 多年的欧几里得几何是否是唯一的几何真理产生了怀疑，到 16 岁时，他已清楚地看到非欧几何的曙光。

由于高斯聪明好学，他很快成为布伦瑞克远近闻名的人物。

一天，在放学回家的路上，高斯边走边看书，不知不觉地走到了斐迪南公爵（？—1806）的门口。在花园里散步的公爵夫人看见一个小孩捧着一本大书竟如此着迷。于是叫住高斯，问他在看什么书。当她发现高斯读的竟是

欧拉的《微分学原理》时，十分震惊，她把这件事告诉了公爵。

1791 年，经卡罗琳学院讲师冯 · 齐美尔曼介绍，斐迪南公爵召见了高斯。通过简单的交谈，公爵喜欢上了这个略带羞涩的孩子，并对他的才华表示赞赏。公爵同意作为高斯的资助人，让他接受高等教育。

1792 年，高斯在公爵的资助下进入了布伦瑞克的卡罗琳学院学习。在此期间，他除了阅读学校规定必修的古代语言、哲学、历史、自然科学外，还攻读了牛顿、欧拉和拉格朗日等人的著作。高斯十分推崇这三位前辈，至今还留有他读牛顿的《普遍的算术》和欧拉的《积分学原理》后的体会笔记。在对这些前辈数学家原著的研究中，高斯了解到当时数学中的一些前沿学科的发展情况。由于受欧拉的影响，高斯对数论特别爱好，在他还不到 15 岁时，就开始了对数论的研究。从这时起，高斯制定了一个研究数论的程序：确定课题——实践（计算、制表、或称实验）——理论（通过归纳发现有待证明的定律）——实践（运用定律进一步作经验研究）——理论（在更高水平上表述更普遍的规律性和发现更深刻的联系）。尽管开始研究时并不那么自觉和完善地执行，但高斯始终以极其严肃的态度对待他从小就开始的事业。

1795 年，高斯结束了卡罗琳学院的学习。10 月，进入了哥廷根大学读书。从此，数学神童开始了对数学的研究。

二、大学生活

哥廷根大学成立于 1737 年，是当时德国一所著名大学。它以藏书丰富和教授的知名誉满全国。1795 年 10 月 11 日，高斯到这所大学报到，开始了大学生活。

18 世纪，德国的启蒙运动波及全国，也影响了哥廷根大学的校内生活。在学校里，民主思潮和自然科学的交流空前活跃。许多进步教师开办了讲座，如：曾创立欧洲语言学校的古典语言学家海涅开设艺术史和考古史课程；历史学家施勒策尔发表了批判专制统治体制的专门演说；才华横溢的物理学家李希腾贝尔举办科学讲座。这些学术活动吸引着无数的学生，对高斯自然也起着强烈的熏陶作用。

高斯虽然是个学生，但他边学习边研究前人未曾解开的数学之谜。1795 年，他对数论中的二次互反定律第一个作出严格的证明。二次互反定律是欧拉首次发现的，这是一个了不起的成就。但是，欧拉没有对它进行证明，只举出几个例子作为验证。勒让德在 1785 年独立宣布了这一定理，并且先后给出了两个证明。可惜他的证明并不完备，因为他回避了一些重要的难点。高斯运用数学归纳法证明了这个定律，以致凡是见过这证明的数学家无不拍案叫绝。高斯对此十分重视，称它为“黄金定理”。对于这样重要的定理，高斯认为有一个证明还不够。他反复思考多年，先后给出了 6 个不同的证明。他认为“绝不能以为”获得一个证明以后“研究便告结束，或把寻找另外的证明当作多余的奢侈品”。因为，“有时候，你一开始未能得到一个最简单，最美妙的证明，但正是这样的证明才能深入到高等算术真理的奇妙联系中去。这是我们继续研究的活力，并且最能使我们有所发现。”由此可见，高斯对科学的严谨态度。今天，关于这个定律的证明已有 50 多个，但高斯对这个定律的贡献仍是不可低估的。

高斯是一个兴趣十分广泛的学生，他既喜欢自然科学，也喜爱文学、绘画等社会科学。他在语言学方面有着突出的表现，他不仅能阅读拉丁文和希腊文，而且还能用它们来写文章，文字表达能力极强。在上大学的第一学年中，他对自己究竟是研究数学还是专攻古典文学犹豫不决。因为，这些专业他都爱不忍释。但是，1796 年 3 月 30 日，高斯出色地解决了数学史上的一个难题——正 17 边形的尺规作图这件事，终于促使他下定了攻读数学的决心。

尺规作图是古希腊学者提出的数学问题。早在欧几里得的时候，人们就已经能仅用直尺和圆规作出正三边形、正四边形、正五边形和正 12 边形。但是，当他们试图用这两种工具作正 7 边形、正 11 边形或正 17 边形时，便遇到了极大的困难。在后来的两千多年间，人们虽曾作过许多努力，却都未能成功。于是，有关这类图形的尺规作图就成了世界难题，向人类的智慧提出了严峻的挑战。当时的许多数学家都认为这个问题是不能解决的。

1796 年 3 月 30 日这一天，高斯正在故乡布伦瑞克家中休假。清晨起床后不久，他就用圆规和直尺成功地画出了正 17 边形。之后，他又提出并证明了这种作图的可能性的条件。假期结束后，高斯带着他的结果去见哥廷根大学教授、他的老师克斯特纳。克斯特纳听说高斯正在进行正 17 边形的作图，并且称自己已经解决了，很不相信。他告诉高斯，关于这个问题的精确解是不可能得出的，得出的只能是近似解。他不相信高斯的成果，把高斯赶出了

家门。

事实上，高斯的答案是正确的，他不仅解决了正 17 边形的尺规作图，而且对这类作图问题的可能性作了一揽子回答。他的结论是：“一个正 n 边形能用尺规作出，仅仅在 n 可表示为如下形式时才是可能：$n=2^m\cdot p_1p_2\cdots p_n$；其中 p_1，p_2，…，p_n为各不相同之素数，且具有 $2^{2k}+1$ 形式。”特别是，当 n 为素数时，n 具有 $2^{2k}+1$ 形式即为尺、规作正 n 边形的充分条件。根据这个结论，人们就可以毫不费力地断定，哪些正多边形是可用尺规作出的，哪些则不可用尺规作出。比如，正 17 边形虽然能用尺规作出，但边数比它少的正 7、9、11、13 边形却不能。这样，困扰了几何学家达 2000 年之久的难题终于被这位 18 岁的德国青年作出了完满的答案。下面是正 17 边形的尺规作法：

正 17 边形的完整作法只需一页篇幅；正 257 边形的尺规作图就要占用 80 页纸；而后来数学家盖尔英斯按照高斯方法作出的正 65537 边形的手稿整整装满了一只手提箱。这份手稿至今仍保存在哥廷根大学的图书馆里。

1796 年 6 月 1 日，在《文献汇报》的知识分子专栏中，通过学校一些教授的推荐，高斯发表了他关于成功画出正 17 边形的第一篇论文，并将这一最新发现公诸于世，齐默尔曼教授在推荐文中指出：这是数学上的巨大成果，完成这一成果的是一位年仅 18 岁的大学生,而且他在古典文学上的造诣也不亚于高等数学的成就。

这次成功使高斯大为振奋，从此他下决心把毕生精力奉献给数学科学。他十分珍视这一成果，并希望死后能在他的墓碑上刻上正 17 边形的图案。

从 1795 至 1798 年的大学三年间，是高斯思维的旺盛时期。各种神奇般的想法，像喷泉般地涌流出来，它涉及到数论、代数、分析、几何、概率论等各个方面。高斯后来发表的成果都可以在这个时期里追溯到思想的脉络。

1798 年 9 月 29 日，高斯以优异的成绩结束了在哥廷根大学的学习生活。大学毕业后，高斯没有立即找工作。他回到家乡布伦瑞克赶写博士论文。

当时，高斯可选择的论文题目有很多，但他选择了代数基本定理的证明这一难度大影响大的论题。论文第二年完成，题目是：《关于每一单变量代表整函数都可分解为一阶或二阶实因子之积的证明》。论文以十分新颖的思考方式对代数方程根的存在作了严格的论证。高斯的方法不是去计算一个根，而是去证明它的存在。他指出 P（x+iy）＝0 的复根 a＋ib 相当于平面上的点（a，b），如果 P（x＋iy）＝U（x，y）＋iV（x，y），那么（a，b）必定是曲线 U（x，y）＝0 和 V（x，y）＝0 的交点。通过对这些曲线作定性的研究，他证明了一条曲线上的一段连续弧连结着两个不同区域上的点，而这两个区域是被另一条曲线隔开的，所以曲线 U（x，y）＝0 和曲线 V（x，y）＝0 必相交。

高斯的论文除提交给赫尔姆斯塔特大学外，还分发给了当时他认为有资格对其代数基本定理的论证进行专业评价的 37 个人和机构。由于高斯的论文解决了前数学家达朗贝尔、欧拉和拉格朗日试图解决而没有解决的问题，因此，他的论文受到赫尔姆斯塔特大学校务委员会的肯定。在高斯缺席答辩的情况下，通过了论文。论文评定人是该大学著名的数学教授普法夫。他对高斯的评语是：“这篇论文具有许多优点，说明作者才华突出，通篇叙述充满了完全合理的推论和令人信服的证明。因此，这篇论文出版以后，高斯博士学位将为我们大学增添无比的荣誉。”因此，高斯获得了博士学位。同年，高斯获得讲师职称。

高斯的论文虽然获得了成功，但是，这成功的背后却有着艰辛的历程。

高斯大学毕业后，斐迪南公爵承诺的义务即告完成。高斯在找工作中遇到了困难。他只收了几个学生，时断时续的学费收入仅够他购买每天需要的面包和纸张，至多只允许他偶尔喝上一杯咖啡。像高斯这样一个颇有名望的数学家，为什么收不到学生呢？原因是高斯讲课和他著作一样字斟句酌，言简意赅，他不重复在他看来浅显易懂的道理，这使得一般学生远远跟不上他敏捷的思路。生活的艰辛，终于使他病倒。即使这样，高斯在致斐迪南公爵的信中从未提起自己生活的窘迫。后来，他的朋友巴蒂尔把这个消息告诉了公爵。斐迪南公爵又一次雪中送炭。他不仅为高斯偿还了债务，而且决定继续提供津贴，让高斯安心研究而不致受贫穷的困扰。如果没有公爵的资助，高斯也许不能够顺利地完成研究工作。

三、数论与《算术研究》

1801 年，高斯的名著《算术研究》问世。《算术研究》是用拉丁文写成的。这部书是高斯大学毕业前夕开始撰写的，前后花了三年时间。1800 年，高斯将手稿寄给法国科学院，请求出版，却遭到拒绝，于是高斯只好自筹资金发表。

在这本书的序言一开头，高斯明确地说明了本书的范围：“ 本书所研究的是数学中的整数部分，分数和无理数不包括在内。 ”

《算术研究》是一部划时代的作品，它结束了 19 世纪以前数论的无系统状态。在这部书中，高斯对前人在数论中的一切杰出而又零星的成果予以系统的整理，并积极加以推广，给出了标准化的记号，把研究的问题和解决这些问题的已知方法进行了分类，还引进了新的方法。全书共有三个核心课题：同余理论、齐式论及剩余论和二次互反律。这些都是高斯贡献给数论的卓越成就。

同余是《算术研究》中的一个基本研究课题。这个概念不是高斯首先提出的，但是给同余引入现代的符号并予以系统研究的却是高斯。他详细地讨论了同余数的运算、多项式同余式的基本定理以及幂的同余等各种问题。他还运用幂的同余理论证明了费马小定理。

二次互反律是高斯最得意的成果之一，它在数论中占有极为重要的地位。正如美国现代数学家狄克逊（1874—1954）所说：“ 它是数论中最重要的工具，并且在数论发展史上占有中心位置。 ”其实，高斯早在 1796 年就已经得出了这个定理及其证明。发表在《算术研究》中的则是另一种证明。

从二次互反律出发，高斯相继引出了双二次互反律和三次互反律，以及与此相联系的双二次和三次剩余理论。为了使三次和双二次剩余理论优美而简单，高斯又发展出了复整数和复整数数论；而它的进一步结果必然是代数数理论，这方面由高斯的学生戴德金（1831—1916）作出了决定性的贡献。

在《算术研究》中，高斯出乎寻常的以最大的篇幅讨论了型的理论。他从拉格朗日的著作中抽象出了型的等价概念后，便一鼓作气地提出了一系列关于型的等价定理和型的复合理论，他的工作有效地向人们展现了型的重要性——用于证明任何多个关于整数数的定理。正是由于高斯的带领，使型的理论成为 19 世纪数论的一个主要课题。高斯关于型和型类的几何表式的论述是如今所谓数的几何学的开端。

高斯对数论问题的处理，有许多涉及到复数。首先是对复数的承认，这是个老问题。18、19 世纪不少杰出的数学家都曾被“ 复数究竟是什么？ ”搞不清楚。莱布尼兹、欧拉等数学大师对此一筹莫展。高斯在代数基本定理的证明中无条件地使用了复数。这使得原先仅从运算通行性这点考虑对复数的承认，扩大到在重大的代数问题的证明中来确认复数的地位。高斯以其对该定理的高超证明，使数学界不仅对高斯而且对复数刮目相待。高斯不仅如此，他又把复数带进了数论，并且创立了复整数理论。在这一理论中，高斯证明了复整数在本质上具有和普通整数相同的性质。欧几里得在普通整数中证明了算术基本定理——每个整数可唯一地分解为素数的乘积，高斯则在复整数中得出并证明，只要不把四个可逆元素（±1，±i）作为不同的因数，那么这个唯一分解定理对复数也成立。高斯还指出，包括费马大定理在内的普通素数的许多定理都可能转化为复数的定理（扩大到复数领域）。

《算术研究》似乎任何一个学过中学普通代数的人都可以理解，但是，它完全不是给初学者看的。在当时，读懂这本书的人较少。困难不是详细的计算示例而是对主题的理解和对深奥思路的认识。由于全书有 7 个部分，人们风趣地称它是部“ 加七道封漆的著作 ”。

《算术研究》出版后，很多青年数学家纷纷购买此书并加以研究，狄利克雷（1805—1859）就是其中之一。狄利克雷是德国著名数学家，对分析、数论等有多方面的贡献。他把《算术研究》视为心爱的宝贝，把书藏在罩袍里贴胸的地方，走到哪儿带到哪儿，一有空就拿出来阅读。晚上睡觉的时候，把它垫在枕头下面，在睡前还读上几段。功夫不负有心人，凭着这股坚韧不拔的毅力，狄利克雷终于第一个打开了“ 七道封漆 ”。后来他以通俗的形式对《算术研究》作了详细的介绍和解释，使这部艰深的作品逐渐为较多的人所理解和掌握。

关于《算术研究》和狄利克雷之间还有一段感人的故事。1849 年 7 月 16 日，正好是高斯获得博士学位 50 周年。哥廷根大学举行庆祝活动，其中有一个别出心裁的节目，他们要高斯用《算术研究》中一页原稿来点燃自己的烟斗。狄利克雷正好站在高斯身旁，他看到这个情景完全惊呆了。在最后一刹那，他不顾一切地从自己恩师的手中抢下了这页原稿，并把它珍藏起来。这页手稿直到狄利克雷逝世以后，编辑人员在整理他的遗稿中才重新发现了它。

《算术研究》发表后，拉格朗日曾经悲观地以为“ 矿源已经挖尽 ”、数学正濒临绝境，当他看完《算术研究》后兴奋地看到了希望的曙光。这位 68 岁高龄的老人致信高斯表示由衷的祝贺：

“ 您的《算术研究》已立刻使您成为第一流的数学家。我认为，最后一章包含了最优美的分析的发现。为寻找这一发现，人们作了长时间的探索。……相信我，没有人比我更真诚地为您的成就欢呼。 ”

关于这部著作，19 世纪德国著名数学史家莫里茨 · 康托曾发表过高见，他说：

“ 高斯曾说：‘ 数学是科学的女皇，数论则是数学的女皇。 ’如果这是真理，我们还可以补充一点：《算术研究》是数论的宪章。 ”

《算术研究》是高斯一生中的巨著。暮年高斯在谈到这部书时说：“《算术研究》是历史的财富。 ”

高斯原本计划继续撰写《算术研究》第 2 卷，但由于工作的变化和研究兴趣的转移，这一计划未能实现。

高斯的许多数学成就都是在他去世后才被人们发现的。从 1796 年 3 月 30 日高斯用尺规作出正 17 边形后，他开始记科学日记，并且长期坚持下来，到 1814 年 7 月 9 日。高斯的科学日记是 1898 年哥廷根皇家学会为了研究高斯，向高斯的孙子借来的。从此，这本科学日记的内容才在高斯逝世 43 年后流传。这本日记共 146 项研究成果，由于仅供个人使用，所以每一条记录往往只写三言两语，十分简短。有的条目简单得甚至专家也摸不着头脑。

1796 年 10 月 11 日， Vicimus GEGAN

1799 年 4 月 8 日， $\boxed{\text{REV · GALEN}}$

这两项研究成果，至今仍是个谜。

在 1796 年 7 月 10 日中有这样一条日记：

EYPHKA！num=△+△+△

EYPHKA 是希腊文找到了的意思。当年，阿基米德在洗澡的时候突然发现了浮力定律，兴奋地从浴缸一跃而起，在大街上狂奔高喊的就是“ EYPHKA ！”高斯在这里找到了费马提出的一个困难定理的证明：每个正整数是三个三角数之和。

高斯的科学日记一经披露，轰动了整个科学界。人们第一次了解到，有许多重大成果高斯实际上早就发现，而公开发表得很晚，有的甚至生前根本没有发表。有关椭圆函数双周期性的内容一直到日记发表的时候人们才知道，以致这个重大成果在日记里整整沉睡了 100 年。1797 年 3 月 19 日的一条日记清楚表明，高斯已经发现了这个成果；后来又有一条，说明高斯还进一步认识到一般情况下的双周期性。这个问题后来经过雅可比（1804—1851）和阿贝尔独立研究发展，才成为 19 世纪函数论的核心。类似的例子不胜枚举。

这样大量的重大发现在日记里竟被埋没了几十年甚至一个世纪！面对这一不可思议的事实，数学家无不大为震惊。如果及时发表这些内容，无疑会给高斯带来空前的荣誉，因为日记中的任何一项成果都是当时世界第一流的。如果及时发表这些内容，就可以免得后来的数学家在许多重要领域中的苦苦摸索，数学史因而将大大改写。有的数学家估计，数学的发展可能要比现在先进半个世纪之多。

为什么会出现这现象呢？这与当时的社会环境和高斯个人性格有十分重要的关系。

18 世纪，数学界贯穿着激烈的争论，数学家们各持己见，互相指责，由于缺乏严格的论证，在争论中又产生了种种错误。为了证明自己的论点，他们往往自吹自擂，互相讽刺挖苦，这类争论给高斯留下了深刻的印象。高斯虽然出身贫微，却和他的父母一样，有着极强的自尊心，加之他对科学研究的极端慎重的态度，使他生前没有公开这本日记。他认为，这些研究成果还须进一步加以论证。他在科学研究上遵循的格言是“ 宁少毋滥 ”。

高斯这种严谨的治学态度，虽然使后辈科学家付出了巨大的代价，但是，也给科学研究带来了好处。高斯出版的著作至今仍然像第一次出版一样正确而重要，他的出版物就是法典，比人类其他法典都更高明，因为不论何时何地从未发现其中有任何毛病。

高斯治学的态度正如他在自己的肖像下工工整整地写下的《李尔王》中的一段格言一样：

“ 大自然，您是我的女神，我一生的效劳都服从于您的规律。 ”

高斯在数学领域中的成就是巨大的。后来人们问起他成功的秘诀，他以其特有的谦逊方法回答道：

“ 如果别人思考数学的真理像我一样深入持久，他也会找到我的发现。 ”

为了证明自己的结论，有一次他指着《算术研究》第 633 页上一个问题动情地说：

“ 别人都说我是天才，别信它！你看这个问题只占短短几行，却使我整整花了 4 年时间。4 年来我几乎没有一个星期不在考虑它的符号问题。 ”

四、涉足天文学

《算术研究》出版后，20 年间没有引起人们的关注。它既没有给高斯带来荣誉，也没有给他带来利益。为了出版这部书，他甚至还欠了债。这是他转向应用研究的一个原因。

1801 年 10 月的一天，齐美尔曼因将赴魏玛工作，临行前来看望高斯。他顺便带来了一期查赫出版的《每月通讯》。齐美尔曼也许是无意，但是正是他带来的那本期刊上刊登的一篇《对皮亚齐教授 1801 年 1 月 1 日在巴勒莫发现天体的观察》一文，使高斯改变了研究方向，开始涉足天文学领域。

事情可追溯到 1776 年。那一年，德国数学家堤蒂斯提出了一个求太阳与诸行星之间距离的经验法则。他在数列 0、3、6、12、24、48、96（从第三项起，每一项是前一项的两倍）的每一项上都加 4，得到 4、7、10、16、28、52、100。堤蒂斯说这些数字几乎就等于与太阳到水星、金星、地球、火星、木星和土星的距离之比，这就是所谓的堤蒂斯—彼得定律。但 28 例外，在该处没有行星，这就留下了一个谜。1781 年，英国天文学家赫舍尔发现了天王星，并证实了它正处于 196（2×96＋4）位置时，堤蒂斯—彼得定律就更令人折服了，人们坚信在 28 这个位置上应该还有一颗行星。1801 年元旦的晚上，意大利天文学家皮亚齐终于在巴勒莫发现了这颗处于 28 位置的新星，命名为“谷神星”。他继续观察这颗新星，跟踪观察几天后，他发现这是一颗小行星。不幸的是，皮亚齐在 2 月 21 日突然病倒，观察被迫停止、他在病床上挣扎着把观察结果告诉欧洲同行。可是，当时正值拿破仑远征埃及，地中海已经被英国舰队严密封锁。等到欧洲天文学家们得知这个姗姗来迟的消息时，小行星已经靠近太阳，消失在太阳耀眼的光芒之中。

这件事给当时的天文学界提出了一个难题。如何根据少量的观察结果推算出该行星运动的轨道？当时很多著名的天文学家如蔡赫、奥尔贝斯等人千方百计地来寻找失踪的“谷神星”，但都未成功。

高斯看了齐美尔曼送来的文章后，决定计算行星运动的轨道。高斯根据皮亚齐提供的仅 9°的一段小弧的观察数据，经过几个星期的计算，得出“谷神星”在 360°上的运动轨道，同时创立起由三次观测决定小行星运动轨道的计算方法。1802 年，人们利用高斯的计算结果，重新找到了谷神星。从 1802 年起，高斯又相继算出了智神星、婚神星和灶神星的轨道，还作了规模极大的关于行星摄动的计算。

在计算行星运转轨道时，高斯高超的计算技术和顽强奋斗的毅力得到了充分的体现。 有一个有趣的对比，1769 年，欧拉为了计算一颗彗星的轨道，足足进行了三天紧张的工作，致使后来瞎了一只眼睛，而同样的计算，高斯却只用了一个小时。高斯幽默地说：“如果我在 3 天内连续进行欧拉那样的计算，显然，我也会双目失明的。”其实，高斯在计算时也花了很大的力气。在计算“智神星”时，他必须算出约 33.7 万个数字，他 1 天计算 3300 个数字，共花了 100 多天的时间。在 3 个多月的时间内，共记录下 4000 个左右的计算结果。

高斯对此说：“我对数学上复杂的运算总是爱不释手，只要我认为是一件有意义的事，值得向人们推荐，我都愿意竭尽全力去完成，哪怕是钻牛角尖。”从这里，我们可以看到高斯忘我工作的精神和对科学执着追求的精神。

高斯在天文学上取得的一系列重大成就，使他名声大振，贺电、请柬、

奖金、学位证书和科学院院士头衔纷至沓来。哥廷根市政府授予高斯“哥廷根巨人”的光荣称号。在一次学术会议上，德国著名自然科学家洪堡（1769—1859）问法国大数学家拉普拉斯，谁是德国最大的数学家。拉普拉斯说：“帕夫。”洪堡大吃一惊，问：“那么高斯呢？”拉普拉斯说：“高斯是世界上最伟大的数学家。”

高斯是一个热爱家乡、热爱祖国的人，尽管有很多国家用高薪聘请他，他都没有去。1802 年，彼得堡科学院天文台（今普尔柯沃天文台）曾用高薪邀请他任台长，高斯婉言谢绝了，因为资助他的斐迪南公爵不同意他去，同时他自己也不愿离开祖国和家乡。他在 1803 年 6 月 21 日写给朋友鲍耶的信中说：“我不能离开家乡去俄国彼得堡任台长，因为不仅公爵不同意我去，而且我也十分爱我美好的祖国。如果不是令人生厌的战争阻碍我计划的实现，我真渴望在家乡的一座小小天文台工作，对天文学、星象学和地磁学进行深入的研究，我精神上的罗针将永远被上述工作所吸引。”

1804 年，哥廷根天文台聘请高斯去任台长，高斯舍不得离开家乡布伦瑞克，没有去。后来，因费迪南公爵被捕，在法兰西监狱一次逃亡中丧生，使高斯想在布伦瑞克建立一座天文台的计划落空，他才在家庭生活沉重负担的迫使下离开家乡，1807 年 7 月 25 日去哥廷根天文台工作。

高斯任哥廷根天文台台长初期，正值普法战争失败。普鲁士居民要向法国交纳 10 亿以上的赔偿费。高斯一家也不例外。生活虽然艰苦，但高斯从不接受别人的馈赠。他继续进行天文学的研究工作。

1809 年，高斯的第二本巨著《天体沿圆锥曲线绕日运动的理论》一书正式出版。这部书最初是用德文写的，但是出版商为追求利润，希望高斯用拉丁文写。为了不使这部书夭折，高斯用拉丁文改写了此书。在这部书中，他首先公布了最小二乘法原理的应用，并阐述了在各种观测情况下，如何计算圆锥形轨道的方法和摄动的理论。系统的论述和严谨的证明使这本书成为天文学中的优秀著作。鉴于高斯研究行星轨道及其摄动方面的重大成就和这本著作的出版，法国巴黎科学院在 1810 年授予高斯“优秀著作和最佳天文观测”的荣誉称号，同时颁发巨额奖金。

然而，就是这本给高斯带来荣誉的巨著。同时也给他带来了烦恼。

高斯在这部书中提到他远在 1794 年就发明了最小二乘法,这件事引起了当时法国数学家勒让德的不满。勒让德在 1806 年《决定彗星轨道的新方法》中提出了最小二乘法。勒让德当即给高斯写信，希望高斯不要掠人之美。高斯表现得十分平静，他不愿意为这件事动肝火。他在写给朋友奥尔伯斯的信中说：“似乎我的命运就是如此——我所有的理论著作都与勒让德发生了冲突。比如，高等算术（数论）、有关椭圆弧长的超越函数的研究和几何基础，而现在又在这里，我在 1794 年所应用的原理，就是为了用最简的方法求得一些绝对不可知的真值，而令误差平方之和为最小，这一原理也同样应用于勒让德的著作中，其中阐述得十分有根有据。”这场风波由于高斯的不申辩而宣告平息。这在很大程度上表现了高斯不贪图名利。

此后，高斯又在天文学方面取得了一系列成果。1808 年，他创立太阳等高法求钟面时与视正午的改正数，用太阳近子午线高度求纬度的方法，还创立同时测定钟差和纬差的多星等高法。1818 年，他建立了高斯形式的任意常数变易法和长期差理论，用以计算行星轨道要素的长期变化。用这个方法，英国天文学家亚当斯（1819—1892）计算出狮子座流星群升高点的长期变化；

美国希尔（1838—1914）则计算出水星、金星的长期摄动。

1815 年，“ 高斯天文学校（现名） ” 正式成立，高斯在这所学校中任天文学教授。在他精心培育下，许多优秀学生后来都成了著名的天文学家，如莱比锡天文台台长默比乌斯、柏林天文台台长恩克、马尔堡天文台台长格尔林和曼海姆天文台台长尼古拉等等。

从 1801 年至 1818 年，高斯在天文学领域里大展奇才，为天文学的发展作出了应有的贡献。

五、从事大地测量

1818 年以后，高斯开始从事大地测量工作。早在 18 世纪初，欧洲科学家已经开始采用大地测量的方法来计算解决地球究竟是不是一个圆球的问题。1736 年，法国曾在北欧和南美进行过用子午线弧长测量地球的工作。19 世纪以来，由于资本主义经济的不断发展，加上拿破仑统治下的法国与反法联盟间的持续战争，地理考察和地形图的绘制被提到议事日程上来。英、法、俄、德、意等主要资本主义国家都先后组织起庞大的测绘队伍，有计划地进行本国领域的测绘工作。

1817 年，阿尔顿天文台台长、著名天文学家舒马赫（1780—1850）受丹麦政府委托，开始在德国北部进行测量。测量一直延伸到汉诺威公国（前德意志西部邦国）。舒马赫请求他的老师高斯出面向汉诺威政府提出建议。高斯同意后，当年就向汉诺威政府提出了一份详细的报告，说明了进行大地测量的必要性。第二年，汉诺威政府批准了高斯的计划，并拨款表示支持，高斯被丹麦政府和汉诺威政府任命为科学顾问。

1818 年 10 月初，高斯和舒马赫一起进行了三角网合为一体的测量。但是，由于光标信号设备太差，这次测量没有成功。当时的首要问题是要增大光束传输的距离，高斯的目标是让光束从蒙勃朗峰照到威尼斯，也就是说要通过 450 千米的距离。这是一个在技术上和工艺上有一定难度的问题。

一次偶然的机会，高斯在拉丁堡的米哈伊诺夫架上看到了从汉堡标架上一窗户里射出的强烈光束，这引发了他发明日光反射器的想法。1820 年秋，高斯发明的日光反射器要进行现场实验，人们闻讯赶来，都想亲眼看一看从几百里外反射而来的太阳光束。当远方星状光束出现时，人们都欢呼起来，他们向高斯表示祝贺，并预祝他大地测量成功。高斯十分珍爱他发明的日光反射器，后来，他不止一次地为原先的设计作出改进，最后还试制成功被广泛应用于大地测量的镜式六分仪。

汉诺威弧度测量工作一开始，高斯亲自参加野外测量工作。他白天观测，夜晚计算。他自己曾作过统计，五六年间，经他亲自计算过的大地测量数据，超过 100 万次。1824 年，在长期艰苦的野外作业中，高斯因日夜操劳病倒了。他的一些好友听到消息后，写信劝他不要再去野外工作了。但他用客气的口吻回答劝他的贝赛尔说：“ 您多次来信强调大地测量的成果价值不大，……好像有点浪费我的宝贵时间，……说真的，我也曾考虑过，可能世界上全部测量成果，在一些人眼里抵不上一条定理的发明……但在我眼里，却是在追求一个伟大的目标。 ”

当高斯领导的三角测量外场观测已走上正轨后，高斯就把主要精力转移到处理观测成果的计算上来,并写出了近 20 篇对现代大地测量学具有重大意义的论文。

《关于保持无穷小部分相似性的曲面向平面投影的条件》是这一系列论文中的重要一篇。在这篇论文中，高斯提出“ 正形影 ”的概念，详细地叙述了平面、正圆柱面、球面以及旋转椭圆面在平面上的正形投影方法。在文章的附注中，高斯还介绍了应用椭圆面向球面正形投影理论，解决了大地测量的计算问题。这篇论文 1822 年作为解决丹麦科学院提出的建立地图格网问题的应征论文首先发表。

1827 年，作为大地测量上的又一成果《论曲面的一般研究》一书出版。

这部著作的意义不在大地测量而在数学上，它是微分几何发展史上一块重要的里程碑，标志着以曲面为基本对象的微分几何的创立。

1844 年和 1847 年，高斯先后发表了两篇题为《大地测量学研究》的文章，对如何用椭圆在球面上的正形投影理论解决大地测量问题作了进一步的回答。在前一篇论文中，高斯提供了椭圆面向球面投影时距离和方向的所有变换公式，并以汉诺威三角网为例证，对公式的具体运用作了详细的介绍。由于通过变换公式计算难以获得精确解，高斯用了近三年的时间，于 1847 年又创立了可直接用于椭圆面的计算方法，这种方法至今仍在大地测量学中保持着它的实用价值。

高斯在大地测量的实践中，不断革新，丰富了大地测量学的理论。他把天文学引进大地测量中，创造了太阳等高测定时间法，太阳近中天高度测纬度法，特别是同时测定时间和纬度的多星等高法，广泛适用于各级精度的大地天文定位，一直沿用至今。他把数学引进大地测量中，使用了最小二乘法进行观测值的平差，在大地计算中推导出内插公式，他创造的高斯正投影（亦称相似投影或等角投影），解决了将椭球曲面图形投影到球面上的问题，使地图数学精度得以提高，从而推导出等角横切椭圆柱投影（即高斯投影）、立体投影、正形标准圆锥投影及双投影等公式。由于他解决了地图投影的难题，1822 年丹麦科学院授予高斯特别奖，以表彰他在大地测量方面取得的成就。

汉诺威大地测量工作直到 1848 年才基本结束。这项大地测量史上的巨大工程，如果没有高斯在理论上的仔细推敲，在观测上力图合理精确，在数据处理上尽量周密细致的出色表现，就不能完成。在当时条件下布设这样大规模的大地控制网，精确地确定 2578 个三角点的大地坐标，可以说是一项了不起的成就。

六、非欧几何和微分几何

早在公元前 300 年，古希腊数学家欧几里得在总结前人研究和实践成果的基础上，用演绎法叙述平面几何原理，一般称为“欧氏几何”。欧几里得提出的五条基本公里，是世界公认的最早公理化名作，其中前四条是容易理解的。但是，第五条平行公理即在平面上过直线外一点，能，而且只能作一条直线与该线平行，却反映出许多的复杂方面。

历史上许多数学家都试图借助前四条公理来证明平行公理,直到 18 世纪时，许多做过尝试的人都一一失败了。

高斯在 1792 年，也就是他 15 岁时，已经有了非欧几何的思想。这个思想包括两个内容，一是他意识到除欧氏几何外还存在着一个无逻辑矛盾的几何；二是在这几何中欧氏几何的平行公理不成立。1799 年，高斯在给非欧几何的另一创立者，匈牙利数学家鲍耶（1802—1860）的父亲的信中，再次强调了平行公理无法在欧氏几何中加以证明的意见，并开始重视开发新几何学的内容。从 1813 年起，高斯先后称他所设想的几何学为“反欧几里得几何”、“星际几何”、“非欧几里得几何”等。高斯不仅确信新几何无逻辑矛盾，而且还似乎相信它是可用的。1817 年，高斯在给奥尔伯斯的信中说：“我愈来愈深信我们不能证明我们的‘欧几里得’几何具有‘物理的’必然性，至少不能用人类理智，也不能给予人类理智以这种证明。或许在另一个世界中我们可能得以洞察空间的性质，而现在这是不能达到的。”后来，在汉诺威大地测量时，高斯试图通过测量霍海哈根——布洛肯——英泽尔堡三个山头所构成的三角形的内角和，以验证非欧几何的正确性，但未成功。

高斯关于非欧几何的思想尽管十分卓越，但他却没有及时发表，因为占优势的传统势力并未被说服。1813 年，他曾气愤地说：“在平行线的理论中，我们现在并不比欧几里得研究得更深更好，这是数学界的耻辱。我终究相信，在数学领域内或迟或早将会得出一个崭新的概念。”对于平行公理的被埋没，他感到十分惋惜，说：“平行公理的论证便如粪土一样地被埋没了。”高斯关于非欧几何学的论点，虽然没有公开发表，但是他的知己朋友们知道他的研究情况。施魏卡特就曾称赞高斯是非欧几何学的“伟大创始者”。

当时，除高斯外还有其它一些数学家研究“非欧几何学。”高斯的朋友鲍耶的儿子雅诺斯在 1823 年证明了非欧几何的存在，并于 1931 年在其父亲的著作的附录中公布了这一成果。高斯对年轻人勇于探索的精神表示了赞扬。他说：“今天我特别高兴地收到了从匈牙利寄来的关于非欧几何论述的小册子，雅诺斯在小册子中发展了我的思路和成果，并取得了巨大的成功。虽然这些论述对一些人来说是比较陌生的，但对于一位青年来说却是非常难能可贵的，我认为他具有第一流的数学天才。”

另外，远在俄国喀山的一位数学家罗巴切夫斯基也发表了关于非欧几何的论著，同样也得到高斯的称赞。1826 年，罗巴切夫斯基在喀山科学协会上作了非欧几何的学术报告。1829 年，正式出版了题为《论几何学的原始基础》一书。这部著作在俄国没有引起任何反响。1837 年，罗巴切夫斯基将文章译成法文并公开发表，法国一些评论家仍然没有认识到这篇论文的重要性，甚至把它称为“抽象的几何学”。1840 年，罗巴切夫斯基又用德文写了《平行线理论的几何研究》一文。这篇论文发表后，引起了高斯的注意，他非常重视这一论证，积极建议哥廷根大学聘请罗巴切夫斯基为通信院士。为了能直

接阅读他的著作，从这一年开始，63 岁的高斯开始学习俄语，并最终掌握了这门外语。为了使非欧几何能够尽快得到世人的承认，高斯向他的朋友舒马赫推荐了这篇文章，在 1846 年 11 月 28 日致舒马赫的信中他说：“ 这篇论文阐述了非欧几何学的一些要素，使之成为一个比较严密的体系。您知道，我在 54 年前就曾有过这些概念，所以这篇文章对我来说，并不新奇。问题是罗巴切夫斯基从另外一条路子上发展了它，说明他具有卓越的几何天才。因此，我希望您能仔细详读这篇文章，它将使您获益匪浅。 ”

今天，非欧几何已经被人们承认并接受。高斯、雅诺斯、罗巴切夫斯基三人并称为非欧几何的发明者。在这里，高斯不仅是最先发明者，而且还为后辈数学家的发明提供了必要的条件，高斯的这种大公无私的精神受到后世人的称赞。这段历史也成为了数学史上的一段佳话。

如果说非欧几何是他纯粹数学思维的结晶，那么微分几何则是高斯将数学应用于实际的产物。

18 世纪后期，微分几何从克莱罗开始，经欧拉、蒙日深入研究而发展起来。当时研究的重点限于曲线点上的性质，尚未进行对曲面性质的深入研究，也未建立起曲面微分几何的理论。高斯从大地测量和地图绘制的实践中，引出了许多关于曲面的问题，特别是地图绘制，它涉及到如何最精确地在平面上画出地球表面各部分的形态，由于尺度比例必须受到地球表面弯曲程度的影响而有所改变，因此在当时要完全正确地画出地图是不可能的。于是就产生了关于寻求最精确的绘制方法的问题，在数学上则表现为对曲面的一般理论和分析学的一般方法的探求。

在《论曲面的一般研究》中，高斯从曲面方程 x＝x（u、v），y＝y（u、v），z＝z（u、v）着手，对曲面作了系统的研究，他给出了任何曲面弧长元素的微分表达式，即所谓高斯第一基本二次形式（ds2＝dx2+dy2+dz2）；曲面上两条曲线之间的夹角公式；以及曲面上任意点处的曲率的定义及计算方法。一个重要的结果是：高斯发现，曲率仅仅是参数 u、v 的一个函数，它与曲面是否在三维空间中或曲面在三维空间中的形态完全无关，这就等于指出，如果一张曲面能展开成另一张曲面，那么曲面上任意一点的曲率是不变的；如果建两张一一对应的曲面，那么在对应点上必然有相同的总曲率，必然有相同的几何。因此，对曲面上几何的研究完全可以集中在曲面本身上进行，无须把曲面作为三维欧氏空间中的图形来对待。这就是高斯开创的内蕴几何。

内蕴几何不仅大大地改变了人们对曲面的认识，为微分几何开辟了一个广阔的研究领域，而且把空间的数学概念大大地推广了，使它在现代物理学中占有非常重要的地位。微分几何虽然不是高斯开创的，但是，由于高斯的工作奠定了现代微分几何的发展基础，并指出了它的发展方向。19 世纪微分几何也正是在高斯的基础上，由高斯的学生黎曼（1826—1866），以及黎曼的追随者贝尔特拉米（1835—1899）、李普希兹（1832—1903）等人发展起来的。

七、从事物理学研究

19 世纪初，在著名的探险家、科学家洪堡（1769—1859）的倡议和引导下，欧洲许多国家掀起了地磁观测的热潮。地磁观测即是用专门仪器测定各地磁场强弱和方向的变化规律及其异常的观测。洪堡是高斯的朋友，1804年，他从南美探险归来后，成立了“ 地磁观测协会 ”，并就任理事长。洪堡想吸引高斯研究地磁学，他将丰富的地磁观测资料带给高斯看，高斯对此十分感兴趣。但是，由于当时高斯正从事天文学研究，因此，没有更多的精力从事地磁学的研究。洪堡并不罢休，1828 年他再次拜访高斯，并且带去了更为丰富的资料。洪堡告诉高斯，现在的问题已经不是资料不足而是如何对资料进行科学的处理。他希望高斯从事地磁学研究。这时，高斯已基本结束了大地测量工作，有充分的时间来做这方面的工作。恰巧，那一年，一个比利时物理学家表示愿意协助高斯做地磁实验，这就促使高斯下决定从事这项工作。不久，高斯即投入了对地磁学的研究。在不到两年的时间里，他解决了怎样在地表任何一点测量地球磁场强度的问题，发明了磁强针，并撰写了《引用绝对单位的地面磁压》一书。

1831 年，德国青年物理学家韦伯（1804—1891）在高斯的推荐下，应聘到哥廷根大学任物理教授。从此，两人紧密合作从事地磁学的理论和实验研究工作。尽管他们两人的年龄相差 27 岁，但却合作得非常出色。韦伯是个实验家，高斯则是以理论见长的科学家，由韦伯通过实验得出的结果，高斯通过理论阐述常常变得更为深刻而又清晰。高斯通过理论分析得出结论：“ 磁场是从地球实体内产生的。 ”它不仅定出了磁场成因的范围，而且正确地把人们的注意力引向发生地磁场的地球物理机制的研究。

1833 年，高斯与韦伯在哥廷根天文台内建造起世界上第一座“ 地磁观测台 ”，为了避免观测时受钢铁的干扰，地磁台全部用钢来建造。他还组织了“ 磁学会 ”，出版了刊物。这一年，高斯还建立了物理绝对测量系统的理论。在这一系统中，他把磁场、磁场强度等都归纳为长度、时间和质量三种基本量。他的《地磁论》和《作用的吸引力和排斥力同距离平方成反比的总定理》两篇名著就是在这时写成的。

《地磁论》列举了高斯和韦伯用新的观测方法获得的大量精确观测数据，记录了地磁场每分钟的变化。高斯认为，地球是一个大磁体，其南北极同地理南北极并不精密吻合，地磁位可按高阶球函数展开。高斯通过这样的计算，求出了地磁极的概略位置。后来，一艘北极考察船到达高斯算出的磁极附近，证实了这一理论的正确。

《作用的吸引力和排斥力同距离平方成反比的总理论》导致了数学物理学这门边缘学科的诞生。高斯在对电粒子和磁极之间引力的研究实验中，证明了在引力场中两物质间存在的引力大小同距离平方成反比。他掌握了位于抽象面中力的规律，从而发展了力学、静电学和流体静力学的原理。他用势论作为基本概念，分析出必要的力都可以从无穷远的质点取得。

高斯与韦伯的合作中，最重要的发明是 1833 年至 1834 年间创制的电磁电报。1821 年，法国物理学家安培（1775—1836）提出了用电磁装置传送信号的意向后，许多人开始研究它。1832 年，俄国科学家帕尔 · 希林格首先在彼得堡的夏宫和冬宫之间建立电报联系，一年后，高斯和韦伯便发明了电磁电报。高斯与韦伯的电报机比帕尔 · 希林格的电报机水平要高得多。他们自

己制作了一个电磁感应器，借助它可在两地之间产生较强的电磁脉冲，从而实现两地的通讯联系。收报的一方可用一个磁棒和读数反光镜作为收报机，它和发报机之间用电线连接，就可以看到感应器上显示出来的每一个电流脉冲。

韦伯负责电报机的完善研究。他同哥廷根大学的机械师米歇尔曼一起，安装了一条从城内到天文台内 2 公里的双路电线。途中要通过一些道路和障碍物，铜线常常被来往的车辆和行人破坏，他们改用涂漆的铁丝。为了保护线路，最后他们不得不雇用更夫。通讯工作完成后，发报时按“ 字母表 ”的顺序在感应器上不断地发送电流脉冲，收报者则利用磁棒的偏移量来确定发来的字母。第一次发报的电文是：“ 米歇尔曼，快来！”

电磁电报通讯的成功，使高斯看到了电报技术发展的巨大前景，但是他无力负担巨大的试验费用。对此高斯说：“ 如果有几千塔勒在我手中，一定可以使电报技术更加完善，届时，俄国沙皇的命令无需经过一站站地中转即可迅速传到奥德萨，甚至更远的基亚希塔。”

现在通常把电报的发明权授予美国的莫尔斯（1791—1872），这是因为莫尔斯在 1837 年设计成功了一台有实用价值的电报机，并首次获得专利。1844 年，莫尔斯又建立了从华盛顿到巴尔德摩之间的英国第一条电报线路，拟出了专门的电报代码——莫尔斯电码。但就电报发明的时间而言，高斯和韦伯的电报在莫尔斯的电报之前。

为了纪念高斯对磁学理论的重要贡献，物理学界将磁场强度的度量单位定名为“ 高斯 ”。

除磁学外，高斯在光学上也作出了成绩。约 1835 年，哥根廷天文台安装一台目镜测微仪。在使用中，高斯发现从仪器中测得的数据与按公式计算所获得的结果总有误差。高斯相信自己的计算没有错，仪器也是完好的，那么问题只能出在用作计算出发点的公式上。经过仔细的研究，高斯终于查明公式没有顾及光学玻璃系统的厚度。后来，高斯对这个问题进行了专门研究，创立了中心光线通过任意光学系统的光程理论。

在毛细管现象和结晶学的理论研究上高斯同样也留下了重要成果。

八、婚姻、家庭与生活

高斯在 24 岁时就已成为知名的数学家和天文学家。就在他成名后不久，丘比特的爱情之箭射中了这位年轻的科学家。他爱上了家乡布伦瑞克制造上等皮革工艺师奥斯特霍夫的女儿约翰娜。高斯对这位文静美貌、心地善良的少女一见钟情。可是，这位在数学领域叱咤风云的战将，在爱情王国中却羞怯的像个小学生。他不好意思当面向心爱的姑娘表示爱慕之情，只好用不断写信的方式向她倾诉衷肠。通信两年后，约翰娜才同意了高斯的求婚。高斯对此十分高兴，他在把订婚消息写信告诉鲍耶的信中表露了这种喜悦的心情，他在信中说：“ 我好像总是生活在迷人的春光里，一切光辉灿烂的色彩都展现在我眼前。 ”兴奋的心情跃然纸上。1805 年 10 月 9 日，高斯和约翰娜在布伦瑞克举行了婚礼。

1806 年 8 月，高斯的大儿子出生了。孩子的出生给这个小家庭增添了欢乐。高斯为了纪念他与天文学家约瑟夫 · 皮亚齐合作对“ 谷神星 ” 的成功研究，给孩子取名约瑟夫。第二年，高斯带着妻儿去哥廷根工作。1808 年 2 月 29 日，约翰娜为高斯生了个女儿，女儿长得十分可爱，深受高斯喜爱。

美满、幸福的家庭生活使高斯感到十分满意。他写信告诉鲍耶说：“ 在家中的小天地里，幸福的时光不断给我带来欢乐。比如女儿长了一颗新牙，或者儿子学会了一句话，都好像是发现了一颗新恒星和推导出一条新定理一样，令人兴高采烈。 ”

然而，幸福的时光十分短暂。1809 年 9 月，约翰娜为高斯生下第三个孩子路德维希后不久即病倒。因为没有得到良好的治疗和休息， 10 月 11 日晚就离开了人世。在他妻子临终前，高斯正专心致志地埋头研究问题。当人们告诉他，夫人快咽气了，他却说：“ 让她再等会儿。 ”后来人们又来叫他，他说：“ 我马上就算完。 ”尽管高斯十分爱他的妻子，但是，科学研究对他来说占有更重要的位置。约翰娜死后不久，路德维希也因病去世。丧妻失子的沉重打击，使高斯悲痛万分。为了有人能够抚养幼小的孩子，第二年高斯再次结婚。新娘是约翰娜生前的好友米娜。米娜是哥廷根大学法律学教授瓦尔德克的小女儿，比高斯小 11 岁。米娜是一个过于敏感和容易激动的女性，性格不如约翰娜那么温柔体贴。婚后，他们由于性格不同，生活偶尔也不够和谐。但是米娜对约翰娜的一对子女却充满了母爱。

米娜为高斯生了三个孩子：儿子欧根，1811 年 7 月 29 日出生；儿子威廉，1813 年 10 月 23 日出生；女儿特蕾泽，1816 年 6 月 9 日出生。米娜后因患肺结核，于 1913 年 9 月 12 日去世。

高斯的六个子女中值得的一提的是欧根和特蕾泽。欧根继承了父亲的优点，在孩提时代就显露出在语言和数学方面的天赋。但高斯却让他进哥廷根大学学习法律。欧根不愿意读他不喜欢的书，强烈反对父亲给他的压力。1830 年秋，欧根只身去了美国。经过奋斗，最后成为美国国家银行行长。特雷泽是高斯的小女儿，她在外表和性格上很像她的母亲米娜。母亲去世时。她才 15 岁，但是，却挑起了全部家务重担。她很爱她的父亲高斯。高斯晚年，她始终形影不离地伴随着他，为照顾年迈的父亲献出了她的青春。特蕾泽成了年迈高斯的巨大精神支柱。

在高斯生活中有一则感人至深的事，即他同法国女数学家索菲娅 · 热尔曼（1776—1831）的真挚友谊。

索菲娅是巴黎富商的女儿。她从小酷爱科学，特别是数学。当时巴黎综合工科学校拒绝收女生，索菲娅只好靠父亲的关系，借这个学校学生的笔记来学习。通过不懈的努力，她在声学、弹性的数学理论和数论等方面都取得了出色的成绩，成为近代数学史上第一位杰出的女数学家。

高斯的《算术研究》发表后，她为作者的天才所折服。她决定给高斯写信报告自己在这方面的研究成果。顾虑到当时对女科学家的偏见，她改用一个男性的化名——勒布朗。看了索菲娅的信后，高斯对这些成果极为重视，从此两人通信频繁。拿破仑占领汉诺威后，索菲娅通过关系向法国将军说情，请他注意保护高斯。这时高斯才知道勒布朗原来是位女子。他十分感谢索菲娅的关怀，写信给她，说：“ 当我知道尊敬的 M·勒布朗原来是高贵的索菲娅·热尔曼的化名，我该怎样向您描述我的惊羡之情呢？我简直难以置信您所提供的光辉榜样。爱好一般的抽象科学，特别是爱好整数之谜的人，寥寥无几。……由于性别的关系，您必然要遇到比男性多得无比的困难来使自己从事这项棘手的研究，并克服各种障碍，深入到最核心的部分。因此您无疑具有可贵的勇气、非凡的才能和过人的天赋。 ”

在信上他愉快地签上日期：布伦瑞克，1807 年 4 月 30 日——我的生日。

索菲娅由于是女性，在法国没有任何学位，也不担任任何科学职务，只在 1816 年由于《弹性的数学理论》赢得过法国科学院奖金。高斯十分欣赏索菲娅，他再三向哥廷根大学推荐她，最后，哥廷根大学决定授予索菲娅名誉博士学位。令人惋惜的是，学位尚未授予，索菲娅不幸在巴黎遽然病逝。至此，高斯和索菲娅最终没有见上一面。

高斯一生十分俭朴，就是在他极负盛名时，仍然过着节俭的生活。高斯的一位朋友在谈到他的生活时这样说：“ 一间小书房，一张铺着绿色台布的桌子，一张白色的写字台，一张窄小的沙发，70 岁后添了一把安乐椅，一盏带罩的油灯，没有火炉的卧室，简单的食物，一件长罩衫和一顶天鹅绒小帽，这就是高斯的全部需要。 ”

高斯喜欢阅读文学作品，并且以阅读原著为乐趣。他不时作出些非正式的评论，今天读来仍颇可玩味。高斯晚年特别珍惜宝贵的时间，很少参加宴会，基本谢绝了一切应酬，尽量不在公共场合露面，大部分时间都在书房中度过。散步是他的一项活动，每天，他总是从天文台走到图书博物馆。在博物馆里，花一小时阅读报刊，从中寻找感兴趣的内容。

1854 年起，高斯的身体日渐衰弱。但他仍然坚持参加一些重要的会议。6 月，参加了他的学生黎曼的论文报告会，7 月 30 日，参加了哥廷根铁路通车典礼。1855 年，也就是高斯生前的最后一段时间，他因患心脏病、气喘病，全身浮肿，行动十分艰难，但他仍顽强地坚持工作。最后，他那秀丽、挺拔的笔锋开始颤抖了，不得不放下笔。1855 年 2 月 23 日凌晨 1 点 5 分，高斯躺在靠背椅上，安详地停止了呼吸，与世长辞。

高斯逝世的噩耗传出后，亲朋好友都立即赶来瞻仰遗容，为失去这样一位数学伟人感到惋惜。26 日，人们将高斯葬在哥廷根阿尔班尼教区的公墓墓地。

这一年，德国国王下令铸造高斯纪念币。纪念币的正面是高斯浮雕头像，背面是“ 数学大王 ”四个字。为了纪念高斯早年用直尺和圆规作出正 17 边形，解决了 2000 多年无数数学家为之努力而未能解决的数学难题，满足高斯生前的愿望，哥廷根大学在校园内为高斯建立了一座以 17 边形为基坐的纪念铜

像。

高斯逝世后，为了纪念这位伟大的数学家，人们在他工作和生活的地方，如布伦瑞克、柏林、希尔德斯海姆等地，先后建立了高斯半身像和纪念塔。

1955 年，也就是高斯逝世 100 周年，德国、奥地利、瑞士、英、美、法、苏、日等 20 多个国家都举行了隆重的纪念大会，以纪念高斯为数学、天文学、物理学等学科作出的贡献。

高斯虽然逝世 100 多年了，但是高斯生前的趣闻、轶事、及对人类的贡献，却在后代中一代代地流传下去，成为人们学习的榜样。

九、《高斯全集》简介

高斯在科学上取得的巨大成就是举世公认的。高斯生前撰写的许多论文、著作未能全部发表，因此，在他逝世后，“哥廷根科学协会”组织欧洲的知名科学家对他的全部笔记、遗稿认真消化、精心整理，于 1863—1933 年陆续出版了《高斯全集》。《高斯全集》共 13 卷 15 册，是一部科学巨著，我国北京图书馆和中国科学院数学研究所等单位均有收藏。现将《高斯全集》的情况介绍如下：

第一卷《算术研究》，1863 年出版。全卷共分七章，有：全等数总论、论一阶全等、论残差平方、论二阶全等、论等分圆的定义方程等章。1965 年，美国耶鲁大学将此卷译成英文，以便更多的人学习研究。

第二卷《高等算术》，1876 年出版。包括高斯在 1808 年至 1831 年间发表的有关高等算术的 10 篇论文。主要内容是算术理论的重新证明、关于残差理论的证明及其新扩展、残差平方理论的评述等。

第三卷《数学分析》，1876 年出版。包括 1799—1849 年间发表的有关数学分析的 10 篇论文。主要内容包括代数函数、椭球函数、高斯级数、高斯内插法及关于各篇论文的通报。

第四卷《最小二乘法与大地测量学》，1873 年出版。汇集了高斯生前已发表的有关误差理论、最小二乘法、大地测量学和曲面总论等论文，还附有汉诺威三角测量、地图投影、弧度测量等篇。

第五卷《数学物理》，1867 年出版。搜集了关于力学的基本定理、椭球引力理论、屈光学研究、论地球磁场、数学物理、物理观测等 32 篇论文。

第六卷《天文学论文集》，1874 年出版。收集了高斯的天文学论文 29 篇，包括理论天文学、年代学、行星地心位置计算、光程差和章动、球面天文学、各种天文计算用表等内容，并附有一些知名学者对论文的评述。

第七卷《理论天文学》，1906 年出版。内容包括：天体运动理论及续篇、论抛物线运动、“谷神星”摄动、“智神星”摄动、月球运动理论、月球运动的基本方程、太阳摄动力基本方程的积分、第一近似值、黄纬第二近似值、黄经第二近似值。后 5 篇论文是高斯生前未发表的。

第八卷《算术、数学分析、最小二乘法、几何学》，1900 年出版。这一卷的内容，全是在整理遗稿时才发现的。

第九卷《大地测量学》，1903 年出版。包括用拉姆斯登天顶象限仪测定哥廷根和阿尔托纳天文台之间的纬度差、地球椭球与大地线、椭球至圆球以及平面的双正形投影、简单图形平差、三角网平差、汉诺威三角测量等论文。其中绝大部分论文生前未发表。

第十卷分为上下二卷。上卷为《纯数学的遗著与通信》，1917 年出版，下卷为《纯数学领域内的科学成就》，1922 年出版。下卷各篇文章都是整理高斯遗著的学者们写成的。包括论高斯的数论、论高斯的函数论、几何学家高斯、论高斯的函数与数论数篇文章。

第十一卷分为上下二卷。上卷为《物理学、年代学、理论天文学、实用天文学与球面天文学》，1927 年出版。其中大部分著作是在遗稿中发现的。下卷为《高斯在大地测量学、物理学与天文学上的贡献》，1929 年出版。是许多著名学者对高斯在这三个领域内所获成就的论述。

第十二卷《短篇论文与地磁图》，1929 年出版。这卷包括 42 篇短文、

部分书信和地磁图。短篇论文内容涉及数学、天文学、大地测量学和物理学。多数短文是高斯生前未发表的。书信部分具有重要的文献资料价值。

第十三卷《补编卷》，1933 年出版。包括全集的索引、遗著的说明和高斯的生平三个部分。高斯生平是叙述他一生活动的重要史料。

《高斯全集》文字十分精炼、言简意赅，但文句古奥、理论深邃，一般读者较难理解，但是，读者借助遗著说明将会得到很大的帮助。