跨世纪知识城

主编：刘以林

谈数学

新世界出版社

谈数学

自然数

自然数是在人类的生产和生活实践中逐渐产生的。人类认识自然数的过程是相当长的。在远古时代，人类在捕鱼、狩猎和采集果实的劳动中产生了计数的需要。起初人们用手指、绳结、刻痕、石子或木棒等实物来计数。例如：表示捕获了 3 只羊，就伸出 3 个手指；用 5 个小石子表示捕捞了 5 条鱼；一些人外出捕猎，出去 1 天，家里的人就在绳子上打 1 个结，用绳结的个数来表示外出的天数。这样经过较长时间，随着生产和交换的不断增多以及语言的发展，渐渐地把数从具体事物中抽象出来，先有数目 1，以后逐次加 1，得到 2、3、4…… ，这样逐渐产生和形成了自然数。因此，可以把自然数定义为，在数物体的时候，用来表示物体个数的 1 、2、3、4、5、6……叫做自然数。自然数的单位是“1”，任何自然数都是由若干个“ l ”组成的。自然数有无限多个， l 是最小的自然数，没有最大的自然数。

零

可以说，自然数是从表示“有”多少的需要中产生的。在实践中还常常遇到没有物体的情况。例如：盘子里一个苹果也没有。为了表示“没有”，就产生了一个新的数“零”。

“零”是一个数，记作“0”，“0”是整数，但不是自然数，它比所有的自然数都小。“0”作为一个单独的数，不仅可以表示“没有”，而且是一个有完全确定意义的数，是一个起着很多重要作用的数。具体作用有：

（1）表示数的某位上没有单位，起到占位的作用。例如：103.04，表示十位和十分位上一个单位也没有。0.10 为近似数时，表示精确到百分位。5.00 元表示特别的单价是 5 元整。

（2）表示某些数量的界限。例如在数轴上 0 是正数与负数的界限。“0”既不是正数，也不是负数。在摄氏温度计上“0”是零上温度与零下温度的分界。

（3）表示温度。在通常情况下水结冰的温度为摄氏“0”度。说今天的气温为零度，并不是指今天没有温度。

（4）表示起点。如在刻度尺上，刻度的起点为“0”。从甲城到乙城的公路上，靠近路边竖有里程碑，每隔 1 千米竖一个，开始第一个桩子上刻的是“0”，表明这是这段公路的起

点。

在四则运算中，零有着特殊的性质。

（l）任何数与 0 相加都得原来的数。例如：5＋0＝5，0＋32＝32。

（2）任何数减去 0 都得原来的数。例如：5—0＝5，42—0＝42。

（3）相同的两个数相减，差等于 0。例如：5—5＝0，428—428＝0。

（4）任何数与 0 相乘，积等于 0。例如：5 × 0＝ 0， 0 × 78＝0

（5）0 除以任何自然数，商都等于 0。例如：0÷5＝0，0÷345＝0。因此 0 是任意自然数的倍数。

（6）0 不能作除数。因为任何自然数除以零，都得不到准确的商。例如：5÷0，找不到一个数与 0 相乘可以得 5。零除以零时有无数个商，因为任何数与 0 相乘都能得到 0，所以像 5÷0、0÷0 都无意义。

为什么 1 不是素数

全体自然数可以分为三类：

（1）只能被“ l ”和它本身整除的数叫素数，如：2、3、5、7、11……

（2）除了“ l ”和它本身以外，还能被其他数整除的数叫合数，如：4、6、8、9……

（3）“ 1 ”既不是素数也不是合数。

有人要问，“ l ”也只能被 1 和它本身整除，为什么不能算素数呢？而且“ l ”算作素数后，全体自然数分成素数和合数两类，岂不是更简单吗？

这要从分解素因数谈起。比如，1001 能被哪些数整除，其实质是将 1001 分解素因数，由 1001＝7×ｌｌ×13，而且只有这一种分解结果，知道 1001 除了被 1 和它本身整除以外，还能被 7、11、13 整除。若把“ l ”也算作素数，那么 1001 分解素因数就会出现下面一些结果：

1001＝ 7× 11× 13

1001＝ 1 × 7 × 11× 13

1001＝ 1×1× 7 × 11× 13

……

也就是说，分解式中可随便添上几个因数“ 1 ”。这样做，一方面对求 1001 的因数毫无必要，另一方面分解素因素结果不唯一，又增添了不必要的麻烦。因此“ 1 ”不算作素数。

整数

正整数、零、负整数统称为整数。正整数：l、2、3、4…… ；零：0；负整数：—1、—2、—3 ……正整数即自然数。在小学阶段不学负数，小学学的自然数和零都是整数，也就是说，小学只学习了大于零和等于零的整数。

小数的经历

小数是十进制分数的另一种表示方法。有了小数，使记数更方便了。如圆周率近似值3.1416，若用分数表示，就得写成$\frac{3927}{1250}$，书写、计算都很麻烦。

有位著名美国数学家说：“ 近代计算的奇迹般的动力来自三项发明：印度计数法，十进分数和对数。 ”这里所说的十进分数就是指小数。

最早使用小数的是中国人。公元 3 世纪，我国魏晋时期刘徽在注《九章算术》时就指出，开方不尽时，可用十进制分数（小数）来表示，比西方早 1300 年。元朝刘瑾（1300 年左右）著《律吕成书》中记 106368.6312 为：

〡〇⊥〣⊥〨

⊥〣—〢

把小数部分降低一格，可以说是世界上最早的小数表示法。

中国之外第一个应用小数的是阿拉伯人卡西，他用十进分数（小数）给出了л的 17 位有效数值。

在欧洲，比利时人斯蒂文于 1585 年第一次明确地阐述了小数的理论，他把 32.57 记为

$$3\ \overset{\textcircled{0}}{2}\ \overset{\textcircled{1}}{5}\ \overset{\textcircled{2}}{7}$$ 或32⓪5①7②

1492 年法国人佩洛斯出版的算术书中首次应用了小数点“ . ”，但他的意思是做除法时，如果除数是 10 的倍数，例，__如，1235÷600，先将末两位用点分开然后除以 6，即 123.56÷ 6，仅仅为了做除法时的方便。

直到 1608 年意大利人克拉乌斯出版的代数书中才明确地以小点“ . ”作为整数部分和小数部分的分界，即现代用法。

也有人用“ ， ”来作小数点的记号。直到 19 世纪末，小数点还有种种写法，如 2.5 可写为：2 5；2.5；2・5；$2_{\triangle}5$ 等。

现代小数点的使用大体分为两大派，欧洲大陆派（德国、法国、苏联等）用逗号作小数点，圆点“ · ”用作乘法记号，而不用“ × ”号，因它易与“ × ”相混。英美派小数点用圆点“ . ”，逗号用来作分节号（每三位分为一节）。如一亿五千万，记作 150， 000， 000，而大陆派则写作 150 000 000，不用分节号而是每三位数空一格。

无论是东方还是西方，人们对小数的认识，都经历了几百年甚至上千年的演变。

负数的引入

今天人们都能用正负数来表示两种相反意义的量。例如若以冰点的温度表示O℃，则开水的温度为＋100℃，而零下 510℃则记为—10℃。若以海平面为 0 点，则珠穆朗玛峰的高度约为＋8848 米，最深的马里亚纳海沟深约—11034 米。在日常生活中，人们常用“＋”表示收入，用“—”表示支出。可是在历史上，负数的引入却经历了漫长而曲折的道路。

古人在实践活动中遇到了一些问题：如两人相互借用东西，对借出方和借入方来说，同一东西具有不同的意义；再如从同一地点，两人同时向相反方向行走，离开出发点的距离即使相同，但其表示的意义却不同。久而久之，古人意识到仅用数量表示一个事物是不全面的，似乎还应加上表示方向的符号。因此为了表示具有相反意义的量和解决被减数小于减数等问题，逐渐产生了负数。

我国是世界上最早使用负数概念的国家。《九章算术》中已经开始使用负数，而且明确指出若“卖”是正，则“买”是负；“余钱”是正，则“不足钱”是负。刘徽注《九章算术》，定义正负数为“两算得失相反”，同时还规定了有理数的加、减法则，认为“正、负术曰：同名相益，异名相除”。这“同名”、“异名”即现在的“同号”、“异号”、“除”和“益”则是“减”和“加”，这些思想，西方要迟于中国八九百年才出现。

印度在公元 7 世纪才采用负数，公元 628 年，印度的《婆罗摩修正体系》一书中，把负数解释为负债和损失。在西方，直到 1484 年，法国的舒开才给出了二次方程的一个负根。1544 年，德国的史提菲把负数定义为比任何数都小的数。1545 年，意大利的卡当著《大法》，成为欧洲第一部论述负数的著作。虽然负数早已出现在人们的计算过程中，但却迟迟得不到学术界的承认，直到 17 世纪，数学、力学、天文学获 6 得广泛发展，使用负数可以大大简化计算，所以负数才正式进入了数学。特别是 1637 年，法国数学家笛卡尔发明了解析几何学，建立了坐标点，将平面点与负数、零、正数组成的实数对应起来，使负数得到了解释，从而加速了人们对负数的承认。但直到 19 世纪，德国数学家魏尔斯特拉斯等人为整数奠定了逻辑基础以后，负数才在现代数学中获得巩固的地位。

无理数的风波

无限不循环小数叫无理数。据说，它的发现还曾掀起一场巨大的风波。

公元前 6 世纪，古希腊有个毕达哥拉斯学派——一个宗教、科学和哲学性质的帮会，在数学研究上有很大成绩，以勾股定理、无理数的研究最为著名。毕达哥拉斯学派有一个信条：宇宙间的一切数都能归结为整数或整数之比。毕氏的一个门徒希伯索斯，在研究等腰直角三角形斜边与一直角边之比，或正方形对角钱与其一边之比时，发现其比不能用整数之比表达时，便很吃惊。他们证明了这个数不是整数，绞尽脑汁也找不到这个分数，所以希伯索斯等人阐述了这个发现。因其理论违背毕氏学派的信条而引起同伴们的狂怒，竟被抛入大海。另有传说，毕氏学派规定，每当有新的发现发明，都要保守秘密，不得外传，否则要受到严厉制裁。他们发现无理数后，视无理数为一种不能言说的记号。有一门徒泄露了这一发现，便遭到覆舟毙命的惩罚。然而真理是封不住的，不管毕氏门徒如何反对，无理数终于闯入了数的圣地，使数的概念又扩展了一步。无理数是稠密的，任何两个有理数之间，不管它们多么接近。都存在着无限多个无理数。

真实的虚数

“虚数”这个名词，使人觉得挺玄乎，好像有点“虚”，实际上它的内容却非常“实”。

虚数是在解方程时产生的。求解方程时，常常需要将数开方，如果被开方数是正数，就可以算出要求的根；但如果被开方数是负数，那怎么办呢？

比如，方程$x^2+1=0$，$x^2=-1$，$x=\pm\sqrt{-1}$。那么$\sqrt{-1}$有没有意义呢？很早以前，大多数人都认为负数是没有平方根的。到了16世纪，意大利数学家卡当在其著作《大法》（1545年）中，把$\sqrt{-15}$记为$R\cdot\tilde{m}\cdot15$，这是最早的虚数记号。但他认为这仅仅是个形式表示而已。1637 年法国数学家笛卡尔，在其《几何学》中第一次给出“虚数”的名称，并和“实数”相对应。1777年，欧拉在一篇论文中首次用“ｉ”来表示$\sqrt{-1}$，但以后很少有人注意它。直到19世纪初，高斯系统地使用了这个符号，并主张用数偶（ａ，ｂ）来表示ａ＋bi，称为复数，虚数才逐步得以通行。

由于虚数闯进数的领域时，人们对它的实际用处一无所知，在实际生活中似乎没有用复数来表达的量，因此在很长一段时间里，人们对它产生过种种怀疑和误解。笛卡尔称“虚数”的本意就是指它是虚假的；莱布尼兹则认为：“虚数是美妙而奇异的神灵隐蔽所，它几乎是既存在又不存在的两栖物。”欧拉尽管在许多地方用了虚数，但又说一切形如$\sqrt{-1}$、$\sqrt{-2}$的数学式都是不可能有的，纯属虚幻的。

继欧拉之后，挪威测量学家维塞尔提出把复数（ａ＋bi）用平面上的点来表示。后来高斯又提出了复平面的概念，终于使复数有了立足之地，也为复数的应用开辟了道路。现在，复数一般用来表示向量（有方向的量），这在水利学、地图学、航空学中的应用十分广泛，虚数越来越显示出其丰富的内容。真是：虚数不虚！

虚数的发展说明了：许多数学概念的产生并不直接来自实践，而是来自思维，但只有在实际生活中有了用处时，这些概念才能被接受而获得发展。

л的“马拉松”计算

圆的周长同直径的比值，一般用л来表示，人们称之为圆周率。在数学史上，许多数学家都力图找出它的精确值。约从公元前2世纪，一直到今天，人们发现它仍然是一个无限不循环的小数。因此，人们称它为科学史上的“马拉松”。

关于л的值，最早见于中国古书《周髀算经》的“周三经一”的记载。东汉张衡取л$=3.1466$（又取л$=\sqrt{10}$）。第一个用正确方法计算л值的，要

算我国魏晋之际的杰出数学家刘徽，他创立了割圆术，用圆内接正多边形的边数无限增加时，其面积接近于圆面积的方法，一直算到正192边形，算得л$=3.14124$，又继续求得圆内接正3072边形时，得出更精确的л$=\frac{3927}{1250}$$=3\cdot1416$，割圆术为圆周率的研究，奠定了坚实可靠的理论基础，在数学史上占有十分重要的地位。

随后，我国古代数学家祖冲之又发展了刘徽的方法，一直算到圆内接正24576边形，求出$3.1415926<$л$<3\cdot1215927$，又求得$=\frac{355}{113}$（密率），л$=\frac{22}{7}$（约率），使中国对л值的计算领先了1000年。为此，有人建议把л$=\frac{355}{113}$称为“祖率”，以纪念祖冲之的杰出贡献。

17世纪以前，各国对圆周率的研究工作仍限于利用圆内接和外切正多边形来进行。1427年伊朗数学家阿尔·卡西把л值精确计算到小数16位，打破祖冲之千年的记录。1596年荷兰数学家鲁多夫计算到35位小数，当他去世以后，人们把他算出的л数值刻在他的墓碑上，永远纪念着他的贡献（而这块墓碑也标志着研究л的一个历史阶段的结束，欲求л的更精确的值，需另辟途径）。

17世纪以后，随着微积分的出现，人们便利用级数来求л值，1873年算至707位小数，1948年算至808位，创分析方法计算圆周率的最高纪录。

1973年，法国数学家纪劳德和波叶，采用7600CDC型电子计算机，将л值算到100万位，此后不久，美国的科诺思，又将л值推进到150万位。1990年美国数学家采用新的计算方法，算得л值到4.8亿位。

早在1761年，德国数学家兰伯特已证明了л是一个无理数。

将л计算到这种程度，没有太多的实用价值，但对其计算方法的研究，却有一定的理论意义，对其他方面的数学研究有很大的启发和推动作用。

运算符号的由来

表示计算方法的符号叫做运算符号。如四则计算中的＋、—、×、÷等。

加号“＋”是加法符号，表示相加。

减号“—”是减法符号，表示相减。

“＋”与“—”这两个符号是德国数学家威特曼在 1489 年他的著作《简算与速算》一书中首先使用的。在 1514 年被荷兰数学家赫克作为代数运算符号，后又经法国数学家韦达的宣传和提倡，开始普及，直到 1630 年，才获得大家的公认。

乘号“×”是乘法符号，表示相乘。1631 年，英国数学家奥特轩特提出用符号“×”表示相乘。乘法是表示增加的另一种方法，所以把“＋”号斜过来。另一个乘法符号“·”是德国数学家莱布尼兹首先使用的。

除号“÷”是除法符号，表示相除。用这个符号表示除法首先出现在瑞士学者雷恩于 1656 年出版的一本代数书中。几年以后，该书被译成英文，才逐渐被人们认识和接受。

关系符号

表示数与数、式与式或式与数之间的某种关系的特定符号，叫做关系符号。有等号，大于号，小于号，约等于号，不等号等等。

等号：表示两个数或两个式或数与式相等的符号，记作“＝”，读作“等于”。例如：3＋2＝5，读作三加二等于五。第一个使用符号“＝”表示相等的是英国数学家雷科德。

大于号：表示一个数（或式）比另一个数（或式）大的符号，记作“＞”，读作“大于”。例如：6＞5，读作六大于五。

小于号：表示一个数（或式）比另一个数（或式）小的符号，记作“＜”，读作“小于”。例如：5＜6，读作五小于六。大于号和小于号是英国数学家哈里奥特于 17 世纪首先使用的。

约等于号：表明两个数（或式）大约相等的符号，记作“≈”，读作“约等于”。例如：л≈3.14，读作л约等于三点一四。

不等号：表示两个数（或式）不相等的符号，记作“≠”，读作“不等于”。例如 4＋3≠9，读作四加三不等于九。

“$\sqrt{\quad}$”的来源

最早用“$\sqrt{\quad}$”表示根号的，是法国数学家笛卡尔。17世纪，笛卡尔在的著作《几何学》一书中首先用了这种数学符号。

“$\sqrt{\ }$”这个符号表示两层意思：左边部分“$\sqrt{\ }$”是由拉丁字母“ｒ”演变而来的，它表示“ｒｏｏｔ”即“方根”的意思；右上部的一条横线，正如我们已经习惯的表示括号的意思，也就是对它所括的数求方根。

正因为“$\sqrt{\ }$”既表示方根，又表示括号，所以凡在运算中遇到“$\sqrt{\ }$”，必须先做括号内的算式，然后再做其他运算。也就是说先要做根号运算。

奇妙的数字“9”

将循环小数化成分数，是解决有关循环小数的基本方法。怎样才能将循环小数化成分数呢？这要请我们的老朋友——9 来帮助解决问题。我们知道，

在数列计算中，有一个无穷等比数列的求和公式：$S=\frac{a}{1-q}$。其中a是这个数列的第一项，q 是公比。下面要用这个公式来研究化循环小数为分数的方法。先观察下面两个循环小数：0.6666……＝0.6，0.242424……＝0.24。它们都是从小数点后的第一位开始循环的，叫做纯循环小数。为了便于计算，先将它们写成分数的和的形式：

$$0.666\cdots\cdots = 0.6 + 0.06 + 0.006\cdots\cdots$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\frac{6}{10000}+\cdots\cdots$$

$$0.242424.\cdots\cdots = 0.24 + 0.0024 + 0.000024\cdots\cdots$$

$$=\frac{24}{100}+\frac{24}{10000}+\frac{24}{1000000}\cdots\cdots$$

这就变成了无穷递缩等比数列的形式。0.6666……的公比是$\frac{1}{10}$，而

0.242424……的公比是$\frac{1}{100}$。根据求和公式得：

$$0.66=\cdots\cdots\frac{\frac{6}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{6}{10-1}=\frac{6}{9}$$

$$0.242424\cdots\cdots=\frac{\frac{24}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{24}{100-1}=\frac{24}{99}$$

由此可以看出，要把纯循环小数化为分数，只要把一个循环节的数字化为分子，让分母由 9 组成，循环节有几位数字，分母是几个 9 就行了。例如：

$$0.444\cdots\cdots=0.\dot{4}=\frac{4}{9}$$

$$0.5656\cdots\cdots=0.\dot{5}\dot{6}=\frac{56}{99}$$

$$0.31233123=\cdots\cdots=0.\dot{3}12\dot{3}=\frac{3123}{9999}=\frac{347}{1111}$$

下面再来看看以下两个循环小数：

$0.2888\cdots\cdots=0.2\dot{8}$，$0.3545454\cdots\cdots=0.3\dot{5}\dot{4}$。它们都不是从小数点后的第一位开始循环，这叫混循环小数。用分数的和可表示为：

$$0.28888\cdots\cdots=\frac{2}{10}+\frac{8}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{8}{10000}+\cdots\cdots$$

$$0.35454\cdots\cdots=\frac{3}{10}+\frac{54}{1000}+\frac{54}{100000}$$

这种和的形式，从第二项起，构成了一个分别以 $\frac{1}{10}$、$\frac{1}{100}$ 为公比的无穷递缩等比数列。由求和公式得：

$$0.2888\cdots\cdots=\frac{2}{10}+\frac{\frac{8}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{2}{10}+\frac{8}{100-10}$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{8}{90}=\frac{2\times 9+8}{90}$$

$$=\frac{26}{90}=\frac{13}{45}$$

$$0.35454=\frac{3}{10}+\frac{\frac{54}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{3}{10}+\frac{54}{1000-10}$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{54}{990}=\frac{3\times 99+54}{990}$$

$$=\frac{351}{990}=\frac{39}{110}$$

由此可以看出：把混循小数化为分数，先去掉小数点，再用第二个循环节以前的数字减去不循环部分的数字，将得到的差作为分子；分母由 9 和 0 组成，9 的个数等于一个循环节的位数，9 的后面写 0，0 的个数等于循环部分的位数。例如：

$$0.27777\cdots\cdots=0.2\dot{7}=\frac{27-2}{90}=\frac{25}{90}=\frac{5}{18}$$

$$0.31252525\cdots\cdots=0.31\dot{2}\dot{5}=\frac{3125-31}{9900}=\frac{1547}{4950}$$

数学的变化虽是无穷的，在研究了大量的现象或大量的例题后，应学会从特殊的问题中，善于总结出一般规律的思考方法。

神奇的“缺 8 数”

“缺 8 数”——12345679，颇为神秘，故许多人在进行探索。

清一色　菲律宾前总统马科斯偏爱的数字不是 8，却是 7。于是有人对他说：“总统先生，您不是挺喜欢 7 吗？拿出你的计算器，我可以送你清一色的 7。”接着，这人就用“缺 8 数”乘以 63，顿时，777777777 映入了马科斯先生的眼帘。

“缺 8 数”实际上并非对 7 情有独钟，它是“一碗水端平”，对所有的数都“一视同仁”的：你只要分别用 9 的倍数（9.18……直到 81）去乘它，则 1ｌｌｌｌｌｌｌｌ，222222222……直到 999999999 都会相继出现。

三位一体　“缺 8 数”引起研究者的浓厚兴趣，于是人们继续拿 3 的倍数与它相乘，发现乘积竟“三位一体”地重复出现。例如：

12345679×12＝148148148

12345679×15＝185185185

12345679×57＝703703703

轮流“休息”　当乘数不是 3 的倍数时，此时虽然没有“清一色”或“三位一体”现象，但仍可看到一种奇异性质：乘积的各位数字均无雷同。缺什么数存在着明确的规律，它们是按照“均匀分布”出现的。另外，在乘积中缺 3、缺 6、缺 9 的情况肯定不存在。

让我们看一下乘数在区间〔10～17〕情况，其中 12 和 15 因是 3 的倍数，予以排除。

12345679×10＝123456790（缺 8）

12345679×11＝135802469（缺 7）

12345679×13＝160493827（缺 5）

12345679×14＝172869506（缺 4）

12345679×16＝197530864（缺 2）

12345679×17＝209876543（缺 1）

乘数在〔19～26〕及其他区间（区间长度等于 7）的情况 16 与此完全类似。

乘积中缺什么数，就像工厂或商店中职工“轮休”，人人有份，但也不能多吃多占，真是太有趣了！

一以贯之　当乘数超过 81 时，乘积将至少是十位数，但上述的各种现象依然存在，真是“吾道一以贯之”。随便看几个例子：

（1）乘数为 9 的倍数

12345679×243＝2999999997,只要把乘积中最左边的一个数 2 加到最右边的 7 上，仍呈现“清一色”。

（2）乘数为 3 的倍数，但不是 9 的倍数

12345679×84＝1037037036，只要把乘积中最左边的一个数 1 加到最右边的 6 上，又可看到“三位一体”现象。

（3）乘数为 3ｋ＋ｌ或 3ｋ＋2 型

12345679×98＝1209876542，表面上看来，乘积中出现雷同的 2。但据上所说，只要把乘积中最左边的数 1 加到最右边的 2 上去之后，所得数为 209876543，是“缺 1”数，而根据上面的“学说”可知，此时正好轮到ｌ休息，结果与理论完全吻合。

走马灯　冬去春来，24 个节气仍然是立春、雨水、惊蛰……其次序完全不变，表现为周期性的重复。“ 缺 8 数 ” 也有此种性质，但其乘数是相当奇异的。

实际上，当乘数为 19 时，其乘积将是 234567901，像走马灯一样，原先居第二位的数 2 却成了开路先锋。深入的研究显示，当乘数成一个公差等于 9 的算术级数时，出现 “ 走

马灯 ” 现象。例如：

12345679×28＝345679012

12345679 × 37＝ 456790123

回文结对　携手同行　“ 缺 8 数 ” 的 “ 精细结构 ” 引起研究者的浓厚兴趣，人们偶然注意到；

12345679×4＝49382716

12345679×5＝61728395

前一式的积数颠倒过来读（自右到左），不正好就是后一式的积数吗？（但有微小的差异，即 5 代以 4，而根据 “ 轮休学说 ”，这正是题中的应有之义。）

这样的 “ 回文结对，携手并进 ” 现象，对 13、14、22、23、31、32、40、41 等各对乘数（每相邻两对乘数的对应公差均等于 9）也应如此。例如：

12345679×67＝827160493

12345679×68＝839506172

遗传因子　“ 缺 8 数 ” 还能“ 生儿育女 ”，这些后裔秉承其“ 遗传因子 ”，完全承袭上面的这些特征，所以这个庞大家族的成员几乎都同其始祖 12345679 具有同样的本领。

例如，506172839 是 “ 缺 8 数 ” 与 41 的乘积，所以它是一个衍生物。

我们看到，506172839×3＝1518518517。

如前所述，“ 三位一体 ” 模式又来到我们面前。

能被 2 和 5 整除的数

一个数的末一位数能被 2 和 5 整除，这个数就能被 2 和 5 整除。具体地说，个位上是 0、2、4、6、8 的数，都能被 2 整除。个位上是 0 或是 5 的数，都能被 5 整除。

18

例如： 128、64、30 的个位分别是 8、4、0，这 3 个数都能被 2 整除。

281、165、79 的个位分别是 l、5、9，那么这 3 个数都不能被 2 整除。

在上面的 6 个数中，30 和 165 的个位分别是 0 和 5，这两个数能被 5 整除，其他各数均不能被 5 整除。

能被 3 和 9 整除的数

一个数各个数位上的数的和能被 3 或 9 整除,这个数就能被 3 或 9 整除。

7＋4＋1＋6＝18，18 能被 3 整除，也能被 9 整除，所以 7416 能被 3 整除，也能被 9 整除。

再如：5739 各个数位上的数之和是：

5＋7＋3＋9＝24，24 能被 3 整除，但不能被 9 整除，所以 5739 能被 3 整除，而不能被 9 整除。

能被 4 和 25 整除的数

一个数的末两位数能被 4 或 25 整除，这个数就能被 4 或

25 整除。具体地说，一个数的末两位数是 0，或是 4 的倍数，这个数就是 4 的倍数，能被 4 整除。一个数的末两位数是 0 或是 25 的倍数，这个数就是 25 的倍数，能被 25 整除。

例如：324，420O，675，三个数中，324 的末两位数是 24，24 是 4 的倍数，所以 324 能被 4 整除。675 的末两位数是 75，75 是 25 的倍数，所以 675 能被 25 整除，4200 的末两位数都是 0，所以 4200 既能被 4 整除，又能被 25 整除。

能被 8 和 125 整除的数

一个数的末三位数能被 8 或 125 整除，这个数就能被 8 或 125 整除。具体地说，一个数的末三位数是 0 或是 8 的倍数，就能被 8 整除；一个数的末三位数是 0 或是 125 的倍数，就能被 125 整除。

例如：2168、32000、1875，3 个数中，2168 的末三位数是 168，168 是 8 的倍数，所以 2168 能被 8 整除。1875 的末三位数是 875，875 是 125 的倍数，所以 1875 能被 125 整除。32000 的末三位数都是 0，所以 32000 既能被 8 整除，又能被 125 整除。

能被 7、11 和 13 整除的数

一个数末三位数字所表示的数与末三位以前的数字所表示的数的差（以大减小），能被 7、11、13 整除，这个数就能被 7、11、13 整除。

例如：1281 1 4，由于 128—114=14，1 4 是 7 的倍数，所以 1281 1 4 能被 7 整除。

94146，由于 146—94= 52，52 是 13 的倍数，所以 94146 能被 13 整除。

64152 由于 152—64= 88，88 是 11 的倍数，所以 64152 能被 11 整除。

能被 11 整除的数，还可以用“奇偶位差法”来判定。一个数奇位上的数之和与偶位上的数之和相减（以大减小），所得的差是 0 或是 11 的倍数时，这个数就能被 11 整除。

例如：64152，奇位上的数之和是 6 十 1＋2= 9，偶位上的数之和是 4＋5= 9，9—9= 0，判断出 64152 能被 11 整除。

校庆“35”

校庆35周年了，为了庆祝这个日子，4个同学用35这个数做游戏，游戏的要求是：只能用5这个数字，或者只用7这个数字组成一个式子，其结果等于35。甲和乙分别用4个5和4个7组成35，其式子如下：

甲：5×5＋5＋5=35

乙：7×7—7—7=35

另两个同学丙和丁分别用5个5和5个7组成35。其式子如下：

丙：55—5×5＋5=35

丁：77—7×7＋7=35

这4个式子有一个特点，都是在5×7这个基本式子引申出来的。改变其中一个数字，使它变成1和11，以及5或7的关系，那么最后的式子中就可以保持清一色。

比如：5×（5＋1＋1）=5×5＋5 ＋ 5=35

5×（11—5＋1）=55—5×5＋5=35

7×（7—1—1）＝7×7—7—7＝35

7×（11—7＋1）=77—7×7＋7=35

阿凡提新传

财主正在给 9 个亲戚分一筐苹果，阿凡提来了。这时财主正不知道怎么分好。阿凡提说：“我来帮帮你的忙，保证给他们平均分好，但是有一个条件，最后分剩下的给我。”财主答应了。阿凡提数了 70 多个苹果，分到最后，阿凡提剩下的苹果比其他每人分得的还多。你知道阿凡提是怎么分的，他开始拿出了 70 几个苹果？

解答：把题的意思变成数学语言，就是

7△÷9=○……□

其中○是商数，□是余数，要求余数最大。

由于被除数为 7△，所以○只能是 7 或 8，如果是 8，那么 7△必定在 72 到 79 之间，以 79 为例，有最大余数为 7。即

79÷9＝8……7

但如果○为 7，它的最大余数应该是比除数少 1 的数，即 9— l＝ 8，因此被除数应是：

7×9＋8=71

所以答案应是：

71÷9=7……8

因此，阿凡提最初拿出 71 个苹果，平分给 9 人，每人是 7 个苹果，而剩下的留给阿凡提，阿凡提反而得到 8 个苹果。

跷跷板与不等式

游乐场里的跷跷板，大个儿总是沉沉地压向一端，而小个儿总是被抬到高处，这与数学里的不等式是多么相像！

楞儿游泳班的 8 个孩子，这时也在游乐场里玩跷跷板。他们之中，有 5 个女孩子，3 个男孩子。女孩子的体重都是 25 公斤，男孩子的体重都是 30 公斤。

他们要在跷跷板上比个高低，女孩子占左边，男孩子占右边。只见女孩子坐上去一个，那边男孩子上去一个又给压了下来。连续 3 个女孩子坐在左边板上，3 个男孩子那边又沉沉地压下来。这时第 4 个女孩子再坐上去，左边胜利了，还剩一个女孩子没有机会再上去了。

正在这时，从别处跑来一个男孩子，他向着那 3 个男孩子，说：“我来帮你们。”于是，第 5 个女孩子又上了左边，新来的男孩子上了右边，果然，男孩子这边反败为胜。

女孩子们不高兴了，说：“你太偏向了。”于是，他们之间达成了一个协议：女孩子们下去 3 个，然后，这个男孩子坐在左边，与女孩子们在一道。这样一变换阵式，却并没有改变女孩子们的境遇，那 3 个男孩子还是赢了。试问：这个新来的男孩子的体重大概是多少？

解答：

假设：女孩子用 y 表示（体重为 y 公斤）；

男孩子用 x 表示（体重为 x 公斤）；

新来的男孩子用W表示（体重为 w 公斤）。

那么，新男孩子来了以后，两次竞赛的结果可用两个不等式表示：

$$5y < w + 3x \qquad (1)$$

$$w + 2y < 3x \qquad (2)$$

由（1）式，得到：

$$w > 5y - 3x \qquad (3)$$

由（2）式，得到：

$$w < 3w - 2y \qquad (4)$$

由（3）式和（4）式，得到：

$$5y - 3x < w < 3x - 2y$$

因为，$x=30$ 公斤，$y=25$ 公斤

所以：35 公斤 $< w <$ 40 公斤

新来的男孩子，他的体重在 35 公斤到 40 公斤之间。

数学黑洞

在古希腊神话中，科林斯国王西西弗斯被罚将一块巨石推到一座山上。但是无论他怎么努力，这块巨石总是在到达山顶之前不可避免地滚下来，于是他只好重新再推，永无休止。著名的西西弗斯串就是根据这个故事而得名的。

什么是西西弗斯串呢？也就是任取一个数，例如 35962，数出这数中的偶数个数、奇数个数及所有数字的个数，就可得到 2（2 个偶数）、 3（3 个奇数）、 5（总共五位数），用这 3 个数组成下一个数字串 235。对 235 重复上述程序，就会得到 1、2、3，将数串 123 再重复进行，仍得 123。对这个程序和数的“ 宇宙 ”来说，123 就是一个数字黑洞。

是否每一个数最后都能得到 123 呢？用一个大数试试看。例如：88883337777444992222，在这个数中偶数、奇数及全部数字个数分别为 11、9、20，将这 3 个数合起来得到 11920，对 11920 这个数串重复这个程序得到 235，再重复这个程序得到 123，于是便进入“ 黑洞 ”了。

这就是数学黑洞“ 西西弗斯串 ”。同学们努力学习，去探索、发现其中的奥秘吧！

哥德巴赫猜想

1742 年 6 月 7 日由德国数学家哥德巴赫给大数学家欧拉的信中，提出把自然数表示成素数之和的猜想，人们把他们的书信往来归纳为两点：

（1）每个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和。例如，6= 3＋3，8= 5＋3，100= 3＋97……

（2）每个不小于 9 的奇数都是三个奇素数之和，例如，9=3＋3＋3，15=3＋7＋5，……99= 3＋7＋89……

这就是著名的哥德巴赫猜想。从 1742 年到现在 200 多年来，这个问题吸引了无数的数学家为之努力，取得不少成果，虽然至今没有最后证明哥德巴赫猜想，但在证明过程中所产生的数学方法，推动了数学的发展。

为了解决这个问题，就要检验每个自然数都成立。由于自然数有无限多个，所以一一验证是办不到的，因此，一位著名数学家说：哥德巴赫猜想的困难程度，可以和任何没有解决的数学问题相匹敌。也有人把哥德巴赫猜想比作数学王冠上的明珠。

为了摘取这颗明珠，数学家们采用了各种方法，其一是用筛法转化成殆素数问题（所谓殆素数就是素因数的个数不超过某一素数的自然数），即证明每一个充分大的偶数都是素因数个数分别不超过 ａ与 ｂ的两个殆素数之和，记为（ａ＋ｂ）。哥德巴赫猜想本质上就是最终要证明（ｌ＋１）成立。数学家们经过艰苦卓绝的工作，先后已证明了（9＋9），（7 ＋ 7），（6＋6），（5＋5）……，（1＋5），(1 ＋ 4），（1 ＋ 3），到 1966 年我国数学家陈景润证明了（1＋2），即证明了每一个充分大的偶数都是一个偶数与一个素因数的个数不超过 2 的殆素数之和。离（1＋1）只有一步之遥了，但这又是十分艰难的一步。1966 年至今已整整 30 年了，然而（1＋1）仍是一个未解决的问题。

莱氏数学游戏

俄国诗人莱蒙托夫也是一个数学爱好者，他在服役时，有一次给周围的军官做一个数学游戏。

他让一个军官先想好一个数，不要告诉别人，然后在这个数上加 25，心算好了以后，再加上 125，然后再减去 37。把算好的结果减去原来想的那个数，结果再乘5并除以2，最后，莱蒙托夫对那个军官说：答案是$282\frac{1}{2}$。那个军官感到非常惊奇。立刻又有另一个军官要求试一遍，结果都说明莱蒙托夫计算得又快又准确。

你能知道是什么道理吗？

解答：如果设预先想好的数为 X ，那么莱蒙托夫的计算式是：

$$(X+25+125-37-X)\times 5\div 2=282\frac{1}{2}$$

你仔细看一下式子就发现，莱蒙托夫已经偷偷地把原数减去了，所以式子中不存在未知数，莱蒙托夫只需把早就计算好的答案说出来准没错。

至于，莱蒙托夫第二次、第三次的表演仍能够成功，那还需要下点功夫。也就是说，出题的人一边在出题，一边在计算，只要跳过那个“减去原来想的那个数”就行了。

牛肉拉面

吃也有艺术，艺术中也有数学。就拿吃牛肉拉面来说，有的人喜欢面条粗一点，有的人喜欢面条细一点。大师傅有办法，喜欢吃粗面条的对拉 8 次就行了，喜欢吃细面条的再增加 1 次。试问粗面条共多少根？细面条共多少根？粗面条和细面条的直径差多少？

解答：对拉 8 次后，面条数目为 2^7，因为第一次是由 1 变成 2，然后才是每次乘一个 2。这样 $2^7=128$，粗面条共 128 根。细面条要拉 9 次，面条数为 $2^8=256$ 根。

面条数目增加了一倍，面条的截面积也就小了一倍，可是直径的平方才与截面成正比例，所以粗面条的直径应该是细面条直径的 $*\sqrt{2}$倍。

瞎子看瓜

有一个瞎子把 6 筐西瓜摆成一个三角形，自己坐在中间。一共是 24 个西瓜，每排是 9 个。他每天摸一次，只要每排 3 个筐里的西瓜一共是 9 个，他就放心了。没想到，他的邻居二嘎子跟他开了一个玩笑，第一天偷出了 6 个，第二天又偷出了 3 个，一共少了 9 个西瓜，而瞎子却一点没有发现，这是怎么回事？

解答：因为二嘎子通过改变每筐里的西瓜数，而使每排西瓜总数仍保持 9 个，这样瞎子以为西瓜没有丢，实际上西瓜已经少了。

爱因斯坦的舌头

大科学家爱因斯坦是“相对论”的缔造者，他在科学研究工作之余，又练就了高超的小提琴技艺。他的表情有时很滑稽，让人捉摸不透。世人流传一张照片就是他吐着舌头、凝视前方的形象。

有一个班级进行民意测验：

11 位同学认为表示“惊奇”，7 位同学认为这种意见也可以考虑。

6 位同学认为表示“高兴”，8 位同学认为这种意见也可以考虑。

1 位同学认为表示“幽默”，6 位同学认为这种意见也可以考虑。

1 位同学认为“惊奇”、“高兴”、“幽默”三种神态兼备。

还有 3 位同学认为是表示“无可奈何”。

请问这个班级一共有多少同学？

解答：由题意，认为表示某种神态的同学，他们的意见是肯定和专一的；而认为可以考虑的意见是模棱两可的，他们也可能同意两种意见或三种意见；表示“无可奈何”意见的，也是一种肯定意见。为此，可以用集合的办法画成如图那样的圆圈，相重迭部分就是同意两种意见的，其中间 3 个圆相重迭部分是表示三种神态兼备意见的人数。如果未知的人数分别以 x、y、z、p 表示，则：

$$\begin{cases} x+p+z=7 \\ x+p+y=8 \\ y+p+z=6 \\ p=1 \end{cases}$$

求解得：

x=4，y＝3，z= 2，p＝1

总人数为：

S=11＋6＋1＋3＋x＋y＋z＋p

=11＋6＋1＋3＋3＋4＋2+1

=31

所以，这个班级共有 31 名同学。

牛郎和织女

牛郎星离地球 16.5 光年，也就是以光的速度运行到地球要 16．5 光年。织女星离地球 26．5 光年。如果牛郎和织女同时由各自的星球以最快的速度赶到地球相会，那么牛郎要在地球上等多少年才能见到织女？而见一面之后，织女又匆匆赶回，牛郎至少又要等多少年，才又能与织女相会？

答：牛郎与织女以最快的速度赶路，充其量也就是以光速行进。因此，牛郎比织女先到地球 10 年，牛郎需要等 10 年才能见到织女。

织女匆匆赶回，如果马上又出发的话，来回需 53 年。牛郎要等 53 年才能与织女第二次相见。如果牛郎也返回自己的星座，那么除了路上的时间不算在内，牛郎也要坐等 20 年才能与织女第二次相聚。

百羊问题

百羊问题是出自中国古代算书《算法统宗》中的一道题。

这个问题说的是：牧羊人赶着一群羊去寻找草长得茂盛的地方放牧。有一个过路人牵着 1 只肥羊从后面跟了上来。他对牧羊人说：“你赶的这群羊大概有 100 只吧？”牧羊人答道：“如果这一群羊加上一倍，再加上原来这群羊的一半，又加上原来这群羊的$\frac{1}{4}$，连你牵着的这只肥羊也算进去，才刚好凑满 100 只。”谁能知道牧羊人放牧的这群羊一共有几只？

根据题意，我们可设这群羊共有 x 只，则

$$x+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+1=100$$

解这个方程得 x=36，也就是牧羊人放牧的这群羊共有 36 只。

百鸡问题

中国古代算书《张丘建算经》中有一道著名的百鸡问题：公鸡每只值 5 文钱，母鸡每只值 3 文钱，而 3 只小鸡值 1 文钱。现在用 100 文钱买 100 只鸡，问：这 100 只鸡中，公鸡、母鸡和小鸡各有多少只？

这个问题流传很广，解法很多，但从现代数学观点来看，实际上是一个求不定方程整数解的问题。解法如下：

设公鸡、母鸡、小鸡分别为 x、y、z 只，由题意得：

$$x+y+z=100 \qquad ①$$

$$5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \qquad ②$$

有两个方程，三个未知量，称为不定方程组，有多种解。

②×3—①得：7x＋4y= 100，因此

$$y=\frac{100-7x}{4}=25-\frac{7}{4}x$$

由于 y 表示母鸡的只数，它一定是自然数，而 4 与 7 互质，因此 x 必须是 4 的倍数。我们把它写成：x= 4k（k 是自然数），于是 y=25—7k，代入原方程组，可得：z=75＋3k。把它们写在一起有：

$$\begin{cases} x=4k \\ y=25-7k \\ z=75+3k \end{cases}$$

一般情况下，当 k 取不同数值时，可得到 x 、y 、z 的许多组值。但针对本题的具体问题，由于 x、y、z 都是 100 以内的自然数，故 k 只能取 1、2、3 三个值，这样方程组只有以下三组解：

$$\begin{cases} x=4 \\ y=18 \\ x=78 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=8 \\ y=11 \\ z=81 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=12 \\ y=4 \\ z=84 \end{cases}$$

鸡兔同笼

中国古代的《孙子算经》（公元 280～420 年）一书中，收集了不少算术趣题，“ 鸡兔同笼 ”问题是其中之一。原题为：今有鸡（雉）兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡、兔几何？

原书的解法是：设头数为a，足数为b，则$\frac{b}{2}-a$是兔数，a-（$\frac{b}{2}-a$）是鸡数，这个方法很巧妙。可能是这样思考的：由鸡兔头数和为 a，而足数之和为 b，则有：

$$\begin{cases} 鸡+兔=a & ① \\ 2\cdot 鸡+4\cdot 兔=b & ② \end{cases}$$

这其实是一个二元一次方程组，由$\frac{1}{2}$×②—①得：兔$=\frac{b}{2}-a$，代入①得：

鸡 = a –（$\frac{b}{2}-a$）。由此解得：兔 = 12只，鸡 = 23只。

我们还可以这样考虑：假设笼里全是兔子，则共有 4 × 35= 140 条腿，但实际只有 94 条腿，多了 140—94= 46 条腿，这是由于把鸡假设为兔子，使每鸡多了两条腿造成的，所以应该为： 46÷（4－2）= 23（只），兔为 35—23= 12（只）。

韩信点兵

大凡著名的军事家都是精通数学的。“韩信点兵”的故事就是源出于我国古代《孙子算经》。让我们来欣赏这位将军的智慧：

一日，韩信到前沿检阅一队士兵。这队士兵人数众多，无法一一点清，况且兵贵神速，时间是军队的生命，不能迟迟不决。韩信立即令队伍整队，排成每列 5 人的纵队，最后多余 1 人；接着又命令改成 6 人一列的纵队，最后多余 5 人；然后又变换队形，变成每列 7 人的纵队，最后多余 4 人；最后，下令排成每列 11 人的纵队，最后多余 10 人。操练完毕，韩信不仅了解了这队士兵的军事素质，而且全队士兵的人数也在不知不觉中了如指掌了。

难道他真有神机妙算的本领吗？

这就是著名的“孙子定理”，也是驰名中外的“中国余数定理”。它是这样分析的：

首先，求 5、6、7、11 的最小公倍数：

$M=5\times6\times7\times11=2310$

求得M对于每个因数的商数：

$$a_1=\frac{2310}{5}=462$$

$$a_2=\frac{2310}{6}=385$$

$$a_3=\frac{2310}{7}=330$$

$$a_4=\frac{2310}{11}210$$

以各自的商数为基础，求得余 1 的情况：

$$\frac{3\times462}{5}=\frac{1386}{5}=277\cdots\cdots\text{余}1$$

$$\frac{385}{6}=64\cdots\cdots\text{余}1$$

$$\frac{330}{7}=47\cdots\cdots\text{余}1$$

$$\frac{210}{11}=19\cdots\cdots\text{余}1$$

再以实际上各项的余数代进去，得到

$x_0=1\times3\times462+5\times385+4\times330+10\times210=6731$

由此，6731 是符合题意中的各项余数的，但这并不是最小的解，因为 2310 能被各项都整除，所以要减去 2310 的倍数。

$x_1=6731-2\times2310=2111$

2111 为最小的解。但由于这是解不定方程，可以有无数的解，其通解的形式应该为

$X_2=2111+2310k$（其中 k ＝ 0，1，2……）

幻方与数阵

将 l～9 这 9 个数字填在图 A 中的九个方格里，使每一横行、每一纵列和两个对角线上的数字之和相等。首先我们注意到 1 ＋ 2+3 ＋ 4 ＋ 5 ＋ 6 ＋ 7＋8＋9= 45。而①＋②十③十④＋⑤＋⑥十⑦＋⑧十⑨= 45，因此，①＋②＋③= ④＋⑤十⑥= ⑦十⑧十⑨= 幻和，那么应该有：幻和 × 3= 45，幻和= 45÷3= 15。又，①十⑤十⑨＋③＋⑤十⑦+ ④十⑤＋⑥十②＋⑤+ ⑧= 15× 4= 60，也就是①十②＋③＋④十⑤十⑥＋⑦＋⑧十⑨+3×⑤= 60，所以，45＋3×⑤= 60，⑤=5，即

中间的数应当为 5，其他位置上的数，如果①填奇数，因为①十⑨= 10，所以⑨也是奇数。④、⑦同奇或同偶，当④、⑦同为奇数时，⑧和⑥也应是奇数。因此共有 6 个奇数，又因 l～9 只有 5 个奇数，发生矛盾。当④、⑦同偶时，⑧与⑥也应为偶数，③也应为偶数，这样共有 5 个偶数，也与 1～9 只有 4 个偶数矛盾。因此①是偶数，同理③、⑦、⑨也都是偶数。又①＋⑨=③+⑦ = 10，于是就得到所求解。如左图。

伐木人的争论

伊格纳托夫是前苏联著名的科普作家，他一生写下了许多题材新颖、内容丰富、形式活泼的作品。伐木人的争论是其作品中的一道题。

尼基塔和巴维尔是两个伐木人。有一天，两人干完活正准备吃饭，迎面走来一个猎人：“你们好啊，兄弟们！我在森林里迷了路，离村庄又远，饿得心慌，请分给我一些吃的吧！”

“行啊，行啊，你坐下吧！尼基塔有 4 张饼，我有 7 张饼，咱们在一起凑合着吃吧。”巴维尔热情地说。尼基塔也随声附和着。于是三人平均分吃了 11 张饼。吃过饭，猎人摸出 11 个戈比，说道：“请别见怪，我身上只有这些钱了，你俩商量着分吧！”

猎人走后，两个伐木人争论起来。尼基塔说：“我看这钱应该平分！”巴维尔反驳说：“11 张饼的钱是 11 个戈比，正好是 1 张饼 1 个戈比，你应得 4 个，我应得 7 个！”

他们俩的算法，谁的对呢？显然尼基塔的算法是错的，两人带的饼的数目不同，当然分得的钱也应不同。再看巴维尔的算法：11 张饼，11 个戈比，每张饼 1 个戈比，看起来非常合理，如果问题是“猎人用 11 个戈比买了 11 张饼”，那么巴维尔的算法的确是正确的。可问题是“3 个人平均分吃了 11 张饼，并且尼基塔和巴维尔带的饼又不一样多。”实际上，11 张饼平均分给 3个人，就是说，每人吃了$\frac{11}{3}$张饼。尼基塔有4张饼，自己吃了$\frac{11}{3}$张饼，他给猎人吃了$4-\frac{11}{3}=\frac{1}{3}$张。而巴维尔也吃了$\frac{11}{3}$张，他分给猎人$7-\frac{11}{3}=\frac{10}{3}$张。

猎人吃了$\frac{11}{3}$张饼，付给11个戈比，也就是说，每吃$\frac{1}{3}$张 饼猎人付给一个戈比。他吃了尼基塔$\frac{1}{3}$张饼，故尼基塔应得1戈比，他吃了巴维尔$\frac{10}{3}$张饼，巴维尔应得10戈比。两个人的算法都错了。

36 名军官问题

设有 6 种军衔和来自 6 个团的 36 名军官，能不能把他们排成 6×6 的队列，使得每行每列里都有每种军衔的 1 名军官和每个团的 1 名军官呢？

这是 18 世纪瑞士数学家欧拉提出的一个趣味数学问题。它在统计学，尤其是在试验设计中有重要的影啊。

为了易于说明，我们先考虑有 3 种军衔和来自 3 个团的 9 名军官。用 1、2、3 分别表示 3 种军衔，Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ表示 3 个不同的团，这时，相应的问题的解答是：

上面军衔阵列和团阵列分别是由 3 个不同符号构成的 3 行 3 列的阵列(3×3），其中每个符号在每行与每列恰好只出现一次，我们把这种阵列叫 3 阶拉丁方。而并置阵列中 3^2 个有序对都是不同的（即并置后，所有可能的 9 种情况都出现了），称军衔阵列和团阵列是正交拉丁方。

那么，36 名军官问题就成了：是否存在 6 阶正交拉丁方呢？欧拉曾猜想，阶数为 4ｋ＋2（ｋ是正整数）的拉丁方，任何两个同阶的拉丁方都不是正交的。容易证明 2 阶拉丁方不正交。1901 年法国数学家Ｔａｒｒｙ用穷举法证明了不存在 6 阶正交拉丁方。直到 1959 年才有 3 位统计学家终于证明了，除了 2 阶和 6 阶外，其他情况都有解。欧拉的猜想中，除这两种情况外，其余都猜错了。

龟和鹤

龟和鹤都是长寿的动物。一天鹤爹与鹤子遇见了龟祖和龟孙，彼此谈起了年龄。原来鹤爹的年龄是鹤子年龄的 2 倍，龟祖的年龄是龟孙年龄的 5 倍。它们年龄之和如果乘上 3，等于 900 岁。如果再过 10 年，鹤族年龄的 5 倍加上龟族的年龄也是 900 岁。问现在它们的年龄各是多少？

解答：设鹤子现在的年龄是 x，龟孙现在的年龄是 y 。则鹤爹现年为 2x，龟祖现年 5y，有方程：

3 [（2x ＋ x）＋（5y ＋ y）]=900

10 年以后，鹤子、鹤爹的年龄分别为 X ＋10 和 2x＋10，龟孙、龟祖的年龄分别为 y＋10 和 5y ＋ 10，于是又有方程，

5[（x＋10）＋（2x+10）]

＋（y＋10）＋（5y＋10）=900

联立两个方程，简化为：

$$\begin{cases} x + 2y = 100 \\ 5x + 2y = 260 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} x = 40 \\ y = 30 \end{cases}$$

因此，鹤子现年 40 岁，鹤爹现年 80 岁，龟孙现年 30 岁，龟祖现年 150 岁。

乘车者的常识

有一个乘车者经常坐从东郊到西郊的公共汽车。一天，他嫌车太挤，就沿着公共汽车行车路线走。这时，他发现对面来的公共汽车每隔 6 分钟遇见一次，而背后开来的公共汽车每隔 12 分钟超过他一次。他心算了一下，就知道，这条路线上的公共汽车是隔多少分钟发车一次了。你也能算出来吗？

解答：假设公共汽车的速度是 y，人的走路速度是 x，又设两次发车间隔时间里，公共汽车行驶的路程为 S。

那么，在迎面见到公共汽车的情况下，每经过S距离的时间是$t_1 = 6$分钟，并且$\frac{S}{x+y} = t_2$。

同样，在相同方向的情况下，每经过s距离的时间是$t_2 = 12$分钟，并且$\frac{S}{x+y} = t_2$。解联立方程组：

$$\frac{S}{x+y} = t_1 \quad ①$$

$$\frac{S}{y-x} = t_2 \quad ②$$

将①化简为：

$$\frac{x}{S} + \frac{y}{S} = \frac{1}{t_1} \quad ③$$

将②化简为：

$$\frac{y}{S} - \frac{x}{S} = \frac{1}{t_2} \quad ④$$

③、④相加：

$$\frac{2y}{S} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$$

$$\therefore \frac{S}{y} = \frac{2t_1t_2}{t_1 + t_2}$$

$$\because t_1 = 6, t_2 = 12$$

$$\therefore \frac{S}{y = 8}$$

因为$\frac{S}{y}$正是每段间隔中所需的时间，即发车的间隔时间，所以每两个车发车时间相隔8分钟。

陈省身数学奖

陈省身数学奖为我国数学界最高奖，授予做出突出数学成就的我国数学工作者，以中青年为主。从 1985 年开始，每年颁发一次。奖金额为人民币 1 万元，由香港亿利达工业发展集团有限公司提供。陈省身数学奖评选委员会主任是吴文俊，委员有王元、谷超豪、程民德、胡国定、冯康、段学复。

数学奥林匹克竞赛

最早举办中学生数学竞赛的是匈牙利。1894 年匈牙利“物理—数学协会”通过了在全国举办中学数学竞赛的决议。从此以后，除了在两次世界大战中和匈牙利事件期间中断过 7 年外，每年 10 月都要举行。匈牙利通过数学竞赛造就了一批数学大师，像费叶尔、哈尔、黎兹等，使得匈牙利成为一个数学上享有声誉的国家，同时也引起欧洲其他国家的兴趣，纷纷仿效。1902 年，罗马尼亚由《数学杂志》组织了竞赛。1934 年前苏联在列宁格勒大学主办了中学数学奥林匹克竞赛，首次把数学竞赛与奥林匹克体育运动联系起来，以后逐年举行。数学竞赛的大范围兴起是本世纪 50 年代，据不完全统计，那时举办全国性数学竞赛的已有近 20 个国家。我国在 1956 年由老一辈数学家华罗庚等人倡导，举办了首次中学生数学竞赛。各国数学竞赛的兴起为国际中学生数学奥林匹克的诞生准备了条件。

1956 年，在罗马尼亚罗曼教授的积极倡导下，东欧国家正式确定了开展国际数学竞赛的计划。1959 年起有了“国际数学奥林匹克”，简称 IMO。第一届 IMO 于 1959 年 7 月在罗马尼亚古都布拉索拉开帷幕。但前五届的参赛国仅限于东欧几个国家，60 年代末才逐步扩大，发展成真正全球性的中学生数学竞赛。为了更好地协调组织每年的 IMO，1981 年 4 月成立了国际数学教育委员会的 IMO 分委员会，负责组织每年的活动。自此，ＩＭＯ的传统一直没有中断，并逐步规范化。

我国自 1 985 年参加国际数学奥林匹克竞赛至今，9 年中参赛 50 人次，得奖 40 人次，其中获金牌 32 个，银牌 12 个，铜牌 4 个，取得了举世公认的成绩。

在中学生数学竞赛的影响下，小学数学竞赛也逐步兴起。1986 年 10 月，“华罗庚金杯”数学邀请赛诞生；1991 年 4 月，“小学生数学奥林匹克”赛正式开始。

“华杯”赛于 1986、1988、1991、1993 年已举办过四届，竞赛要经过初赛、复赛、决赛和口试四个阶段。初赛试题通过电视播放，每届都有 200 多万少年参加。在各省组织初赛、复赛的基础上，选出 3 人（初中 1 人、小学 2 人）参加决赛，这四届分别在北京、深圳、长春和成都市举行。

“小学生数学奥林匹克”赛自 1991 年开始，至 1994 年已举办了四届，赛程分初赛和决赛。初赛分 A、B、C（C 卷后来又叫民族卷）三种不同程度的试卷，由各地根据考生的水平自由选定一种，于每年 3 月下旬第一个星期天举行。决赛统一试卷，并于每年 4 月中旬第二个星期天举行。1993 年暑假在山西太原举办了第一次全国小学数学奥林匹克总决赛。

菲尔兹奖——数学界最高奖

19 世纪末，随着数学研究工作的深入，数学上的国际交流越来越广泛，人们迫切需要举行世界性的数学家集会。1879 年第一届国际数学家会议在瑞士的苏黎士举行，3 年后在巴

黎召开了第二届。自 1900 年开始，国际数学家会议（简称 ICM）每 4 年召开一次，除了在两次世界大战期间中断以外，至今已举行了 19 次。在 1950 年的会议上，成立了国际数学家的正式组织“国际数学家联盟”，简称 IMU。IMU 的主要任务是：①促进数学界的国际交流；②组织召开 ICM 以及各分支、各级别的国际性专门会议；③评审及颁发菲尔兹（feiles）奖。

每届 ICM 大会的第一项议程就是宣布菲尔兹奖获奖者的名单，然后授予获奖者一枚金质奖章和 1500 美元的奖金,最后由一些权威数学家介绍得奖者的业绩。这是数学家可望得到的最高奖励。

什么是菲尔兹奖？这要从诺贝尔奖说起。诺贝尔设立了物理学、化学、生物学、医学等科学奖金，但没有数学奖。这个遗憾后来由加拿大数学家菲尔兹弥补了。菲尔兹 1863 年生于加拿大渥太华，在多伦多上大学，而后在美国的约翰·霍普金斯大学得到博士学位。他于 1892～1902 年游学欧洲，以后重回多伦多大学执教。他在学术上的贡献不如作为一个科研组织者的贡献更大。1924 年菲尔兹成功地在多伦多举办了 ICM。正是在这次大会上，菲尔兹提出把大会结余的经费用来设立国际数学奖。1932 年苏黎世大会前夕，菲尔兹去世了。去世前，他立下遗嘱并留下一大笔钱作为奖金的一部分。为了纪念菲尔兹，这次大会决定设立数学界最高奖——菲尔兹奖。1936 年在挪威的奥斯陆举行的 ICM 大会上，正式开始授予菲尔兹奖。迄今有 27 人获奖。

中国有一位菲尔兹奖获得者：邱成桐，他生于广东汕头，受教育于香港，成长于美国，他的导师是中国血统的数学家陈省身。邱成桐 22 岁获博士学位，28 岁升为正教授，1982 年获奖时年仅 33 岁。

设立菲尔兹奖有一条不成文的规定：获奖者不能超过 40 岁。27 名获奖者在获奖时的年龄平均为 34 岁。这说明，数学是年轻人的事业，青少年朋友们，努力啊！